

Die Unschärferelation in den Dirac-Gleichungen und in der relativistischen Schrödinger-Gleichung

VON HENNING HARMUTH

General Electric Co., Advanced Electronics Center at Cornell University, Ithaca, N. Y.
(Z. Naturforsch. 11 a, 101—118 [1956]; eingegangen am 18. November 1955)

HEISENBERG's uncertainty relation results as condition for convergence of the solution of a difference equation which is an analogue to the SCHROEDINGER equation. From DIRAC's equations and the relativistic SCHROEDINGER equation (KLEIN-GORDON equation) — written as difference equations — one obtains in the same manner a generalized uncertainty relation, from which HEISENBERG's is derived as a special case for negligible relativistic mass increase and not too precise position and time measurements.

Aus der zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi - V(r, t) \Psi \quad (1)$$

erhält man durch den Ansatz $\Psi = \varphi + i\psi$ unter Beschränkung auf den eindimensionalen, potentialfreien Fall die beiden Gleichungen:

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$-\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Beim Übergang von Differentialen zu Differenzen sind die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten zu ersetzen (Abb. 1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{(\varphi_{l+1} - \varphi_l)/\Delta x - (\varphi_l - \varphi_{l-1})/\Delta x}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} (\varphi_{l-1} - 2\varphi_l + \varphi_{l+1}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{1}{(\Delta x)^2} (\psi_{l-1} - 2\psi_l + \psi_{l+1}), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &\rightarrow \frac{\Delta_t \varphi}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \rightarrow \frac{\Delta_t \psi}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (5)$$

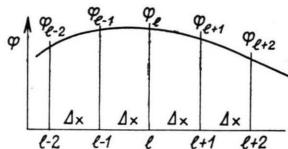


Abb. 1. Übergang zur Differenzengleichung.

Mit Δ wollen wir in dieser Arbeit immer Differenzen bezeichnen; für den LAPLACESchen Operator wird das Symbol ∇^2 verwendet.

Wir erhalten aus den Gl. (2) und (3) folgende Differenzengleichungen:

$$\Delta_t \varphi_{t,l} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (\varphi_{t,l-1} - 2\varphi_{t,l} + \varphi_{t,l+1}), \quad (6)$$

$$\Delta_t \varphi_{t,l} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (\varphi_{t,l-1} - 2\varphi_{t,l} + \varphi_{t,l+1}). \quad (7)$$

Ebenso ersetzen wir die Ausdrücke

$$\varphi_{t+\Delta t,l} = \varphi_{t,l} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t,l} \Delta t \quad \text{und}$$

$$\psi_{t+\Delta t,l} = \psi_{t,l} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{t,l} \Delta t \quad \text{durch}$$

$$\varphi_{t+\Delta t,l} = \varphi_{t,l} + \frac{\Delta_t \varphi_{t,l}}{\Delta t} \Delta t = \varphi_{t,l} + \Delta_t \varphi_{t,l} \quad (8)$$

$$\text{und } \psi_{t+\Delta t,l} = \psi_{t,l} + \Delta_t \psi_{t,l}. \quad (9)$$

Von gegebenen Anfangswerten $\varphi_{t,l-1}$, $\varphi_{t,l}$, $\varphi_{t,l+1}$, $\psi_{t,l-1}$, $\psi_{t,l}$ und $\psi_{t,l+1}$ lassen sich mit Hilfe der Gl. (6), (7), (8) und (9) schrittweise alle weiteren Werte $\varphi_{t+k \Delta t,l}$ und $\psi_{t+k \Delta t,l}$ berechnen, vorausgesetzt, daß dieses Verfahren konvergiert. Im Anhang I wird gezeigt, daß hierzu die Bedingung

$$2m/\hbar \cdot (\Delta x)^2/\Delta t \geq 4 \quad (10)$$

erfüllt sein muß.

Man erkennt, daß eine Verkleinerung der Längeneinheit Δx die Konvergenz zerstören kann, falls nicht gleichzeitig die Zeiteinheit Δt entsprechend verkleinert wird.

Ungleichung (10) enthält zunächst eine rein mathematische Aussage. Physikalische Bedeutung bekommt sie durch Verbindung mit der Erfahrungstatsache, daß unsere Meßinstrumente immer nur von endlicher Feinheit sind. Wir wollen daher Δx mit der Längeneinheit und Δt mit der Zeiteinheit von gegebenen Maßstäben gleichsetzen. Selbstverständlich wird kein fester Wert für diese Maßeinheiten angenommen, sondern wir interessieren uns gerade dafür, was geschieht, wenn sie immer mehr verkleinert werden und dadurch die Genauigkeit der



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Messung gesteigert wird. Im Grenzfall gehen Δx und Δt in dx und dt über.

Das Ersetzen der SCHRÖDINGERSchen Differentialgleichung und der relativistischen Wellengleichungen durch Differenzengleichungen bedeutet eine Verallgemeinerung dieser Gleichungen. Alle aus den Differentialgleichungen formal ableitbaren Beziehungen müssen als Grenzfall für verschwindend kleine Differenzen auch aus den Differenzengleichungen erhalten werden. Die Frage ist, ob zusätzlich neue Erkenntnisse gewonnen werden können, die den zu erwartenden mathematischen Mehraufwand rechtfertigen.

Wegen der Wichtigkeit für die späteren Ausführungen soll das Messen mit Maßstäben endlicher Feinheit im nächsten Abschnitt ausführlich untersucht werden. Wir werden dabei von der Punktmechanik ausgehen und die Ergebnisse anschließend auf die Wellenmechanik übertragen.

Messungen mit Maßstäben endlicher Feinheit

Eine physikalische Messung läßt sich im Prinzip stets auf die Ablesung einer Skala zurückführen. Diese Skala besteht aus einer Folge von Meßmarken, die beispielsweise im Falle einer Uhr die Abstände Δt haben. Der zeitliche Abstand zweier Ereignisse wird gemessen, indem man feststellt, über wieviele Meßmarken der Uhrzeiger – von 0 beginnend – während der Zeit zwischen den beiden Ereignissen hinwegläuft. Die Zahl dieser Marken sei r ($r=0, 1, 2, \dots$); der Zeiger befindet sich also im Augenblick des zweiten Ereignisses zwischen den Marken r und $r+1$, falls er im Augenblick des ersten Ereignisses mit der Marke 0 koinzidierte. Der ganze Vorgang entspricht dem Messen mit einer Stoppuhr. Der zeitliche Abstand der zwei Ereignisse wird mit $r \Delta t$ angegeben, wobei diese Angabe mit der Toleranz $\pm \Delta t$ behaftet ist¹.

Bei dieser Art der Messung ist vorausgesetzt, daß die „Breite“ der Meßmarken und des „Uhrzeigers“ klein ist gegen den Abstand der Meßmarken. Ein Zeitintervall kann demnach beliebig genau angegeben werden (d. h. mit einem Fehler, der klein ist gegen Δt), indem man beobachtet, wann der Zeiger

¹ Man könnte diesen zeitlichen Abstand auch mit $(r+\frac{1}{2})\Delta t$ und der Toleranz $\pm \frac{1}{2}\Delta t$ angeben. Um das Mitschleppen des doppelten Vorzeichens zu vermeiden, ziehen wir die obige Schreibweise vor. Eine entsprechende Bemerkung gilt für Δx .

mit der Marke r und wann er mit der Marke q koinzidiert². Die Toleranz Δt in der Angabe des zeitlichen Abstandes zweier Ereignisse, die mit der Uhr nichts zu tun haben, kommt eben daher, daß dieser Abstand im allgemeinen nicht ein exaktes Vielfaches von Δt ist.

Für die Angabe des räumlichen Abstandes zweier Punkte erhält man ganz ähnlich: Der Abstand zweier Punkte x_0 und x_1 beträgt $l \Delta x$, wenn x_0 mit der Meßmarke 0 koinzidiert und x_1 zwischen den Marken l und $l+1$ liegt; die Toleranz dieser Angabe beträgt $\pm \Delta x$.

Es drängt sich sofort die Frage auf, wie die Genauigkeit der Angabe anderer mechanischer Größen – Geschwindigkeit, Impuls, Energie – durch die endliche Größe von Δx und Δt beeinflußt wird. Betrachten wir einen Punkt, der sich mit beliebiger Geschwindigkeit längs der x -Achse bewegt (Abb. 2). Seine Geschwindigkeit ist in der Differentialrechnung definiert durch

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{t+h} - x_t}{(t+h) - t}.$$

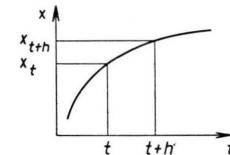


Abb. 2. Geschwindigkeitsmessung mit endlichem Δx und Δt .

In der Differenzenrechnung wird $h \rightarrow 0$ durch $h \rightarrow \Delta t$ ersetzt und man erhält die Geschwindigkeit v_t :

$$v_t = \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{(t+\Delta t) - t} = \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{\Delta t}. \quad (11)$$

Man kann die Geschwindigkeit jedoch auch definieren durch

$$\frac{1}{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_{x+h} - t_x}{(x+h) - x}.$$

In der Differentialrechnung besteht kein Unterschied zwischen den beiden Definitionen. In der Differenzenrechnung hingegen erhält man mit $h \rightarrow \Delta x$ die Geschwindigkeit v_x :

$$1/v_x = (t_{x+\Delta x} - t_x)/\Delta x. \quad (12)$$

² Der Begriff „Koinzidenz“ unterscheidet sich hier von dem entsprechenden Begriff in der Differentialrechnung: „Ein Punkt koinzidiert mit einer Meßmarke“ bedeutet hier nur, daß dieser Punkt innerhalb eines Bereiches (Koinzidenzbereich) um diese Meßmarke liegt, der klein ist gegen den Abstand der benachbarten Meßmarken.

Die Gln. (11) und (12) lassen sich noch umformen, da Ortsdifferenzen in Vielfachen von Δx und Zeitdifferenzen in Vielfachen von Δt gemessen werden. Statt (11) kann man daher schreiben:

$$v_t = l \Delta x / \Delta t = l \Delta v_t. \quad (13)$$

Dabei beträgt die Toleranz von v_t :

$$\Delta v_t = + \Delta x / \Delta t. \quad (14)$$

Gl. (12) nimmt die Form an

$$1/v_x = r \Delta t / \Delta x = r \Delta (1/v_x), \quad (15)$$

und die Toleranz von $1/v_x$ beträgt:

$$\Delta(1/v_x) = + \Delta t / \Delta x; \quad (16)$$

v_t ist die Geschwindigkeit bezogen auf die Zeiteinheit Δt , v_x die Geschwindigkeit bezogen auf die Längeneinheit Δx . Schließlich läßt sich noch eine dritte Geschwindigkeit definieren, die in Anlehnung an die Differentialrechnung „mittlere Geschwindigkeit“ genannt sei (R , $L = 0, 1, 2, \dots$):

$$\bar{v} = L \Delta x / R \Delta t; \quad (17)$$

\bar{v} ist mit der Toleranz $\Delta \bar{v}_t$ behaftet

$$\Delta \bar{v}_t = + \Delta x / R \Delta t, \quad (18)$$

wenn man sich genau auf R Zeiteinheiten Δt bezieht; wird die Messung auf genau L Längeneinheiten Δx bezogen, dann erhält man die Toleranz³:

$$\Delta(1/\bar{v}_x) = + \Delta t / L \Delta x. \quad (19)$$

Legt man der Messung weder genau L Längeneinheiten noch genau R Zeiteinheiten zugrunde, dann entsteht eine zusätzliche Meßtoleranz, die jedoch für genügend großes R und L klein wird gegen $\Delta \bar{v}_t$ und $\Delta(1/\bar{v}_x)$.

Jede der drei Geschwindigkeiten v_t , v_x und \bar{v} bietet für die Messung Vor- und Nachteile. \bar{v} gestattet, die Geschwindigkeit eines Massenpunktes auch mit endlichen Δx und Δt beliebig genau zu messen – falls man weiß, daß sich der Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Weiß man das nicht, dann erhält man nur die Geschwindigkeit gemittelt

³ Man könnte Gl. (17) einmal für \bar{v}_t und einmal für \bar{v}_x anschreiben. v_t und v_x sind jedoch gleich, nur ihre Toleranzen unterscheiden sich.

⁴ „Mindestens“ deshalb, da die Geschwindigkeit mindestens über die Strecke $L \Delta x$ und höchstens über die Strecke $(L+1) \Delta x$ gemittelt wird. Ebenso wird mindestens über die Zeit $R \Delta t$ und höchstens über die Zeit $(R+1) \Delta t$ gemittelt. Die Gln. (20) bis (27) beziehen sich alle auf diese Mindestwerte.

über die Zeit $R \Delta t$ und die Strecke $L \Delta x$; irgendwelche Angaben über den Verlauf der Geschwindigkeit innerhalb dieser Bereiche $L \Delta x$ und $R \Delta t$ lassen sich nicht machen. Das Produkt aus der Toleranz der Geschwindigkeitsmessung $\Delta \bar{v}_t$, aus dem Unbestimmtheitsbereich der Zeitmessung ΔT und dem der Ortsmessung ΔX beträgt auf Grund von Gl. (18) mindestens⁴:

$$\Delta \bar{v}_t \Delta T \Delta X = \frac{\Delta x}{R \Delta t} R \Delta t L \Delta x = L (\Delta x)^2. \quad (20)$$

Ebenso gilt zufolge Gl. (19):

$$\Delta(1/\bar{v}_x) \Delta T \Delta X = (\Delta t / L \Delta x) \cdot R \Delta t L \Delta x = R (\Delta t)^2. \quad (21)$$

Weiterhin ist das Produkt aus der Toleranz der Geschwindigkeitsmessung Δv_t und aus dem Unbestimmtheitsbereich der Zeitmessung ΔT konstant:

$$\Delta v_t \Delta T = (\Delta x / R \Delta t) \cdot R \Delta t = \Delta x. \quad (22)$$

Eine ähnliche Gleichung gilt für $\Delta(1/v_x)$:

$$\Delta(1/v_x) \Delta X = (\Delta t / L \Delta x) \cdot L \Delta x = \Delta t. \quad (23)$$

Die Messung von $1/v_x$ liefert die Strecke, auf der der betrachtete Massenpunkt die reziproke Geschwindigkeit⁵ $1/v_x$ besitzt, mit der kleinstmöglichen Toleranz $\Delta X = \Delta x$; $1/v_x$ ist mit der Toleranz (16) gegeben; der zeitliche Unbestimmtheitsbereich beträgt $\Delta T = r \Delta t$. Das Produkt aus ΔX , $\Delta(1/v_x)$ und ΔT beträgt:

$$\Delta(1/v_x) \Delta T \Delta X = (\Delta t / \Delta x) \cdot r \Delta t \Delta x = r (\Delta t)^2. \quad (24)$$

Weiter gilt:

$$\Delta(1/v_x) \Delta X = (\Delta t / \Delta x) \cdot \Delta x = \Delta t. \quad (25)$$

Der Vergleich von (24) und (25) mit (21) und (23) zeigt, daß die Verringerung des Unbestimmtheitsbereiches der Ortsangabe durch eine gleichgroße Vergrößerung der Toleranz der Geschwindigkeitsmessung erkauft wurde.

Schließlich erhält man bei der Messung von v_t die Zeitangabe mit der kleinstmöglichen Toleranz $\Delta T = \Delta t$; der Unbestimmtheitsbereich des Ortes be-

⁵ Wir rechnen mit $1/v_x$ statt mit v_x , da $1/v_x$ die konstante Toleranz $+ \Delta t / \Delta x$ aufweist; v_x hingegen ist für Geschwindigkeiten kleiner als $\Delta x / \Delta t$ mit einer beliebig kleinen Toleranz behaftet, für größere Geschwindigkeiten jedoch mit der Toleranz ∞ . Man erkennt dies unmittelbar aus Gl. (15), wenn man berücksichtigt, daß r nur die Werte $0, 1, 2, \dots$ annimmt. Aus entsprechenden Gründen wird auch $\Delta(1/v_x)$ verwendet.

trägt $\Delta X = l \Delta x$; die Toleranz der Geschwindigkeitsmessung beträgt $\Delta v_t = +\Delta x / \Delta t$. Es gilt daher

$$\Delta v_t \Delta T \Delta X = l(\Delta x)^2 \quad (26)$$

und

$$\Delta v_t \Delta T = \Delta x. \quad (27)$$

Die größere Genauigkeit der Zeitangabe wird also durch eine geringere Genauigkeit der Geschwindigkeitsangabe erreicht, wie man aus (26), (27), (20) und (22) sofort erkennt. Der Vergleich von (20), (21), (24) und (26) zeigt weiter, daß stets eine Größe – Geschwindigkeit, Ort oder Zeit – auf Kosten der beiden anderen mit der größtmöglichen Genauigkeit gemessen wird. In der praktischen Meßtechnik wird diese Austauschbarkeit der Genauigkeit von Orts-, Zeit- und Geschwindigkeitsmessung ständig benutzt.

In den obigen Gleichungen bedeutet ΔX den Bereich, über den die Geschwindigkeit gemittelt wird. Um den „Ort“ des Punktes zu erhalten, muß man diesen Bereich noch bezüglich eines Koordinatensystems festlegen. Abb. 3 zeigt, was gemeint ist. Mit dem Maßstab A wird festgestellt, daß sich der Punkt P zur Zeit $t=0$ zwischen den Meßmarken λ

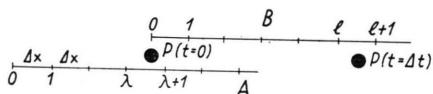


Abb. 3. Orts- und Geschwindigkeitsmessung.

und $(\lambda+1)$ befindet, mit Maßstab B, daß er sich innerhalb des Zeitintervalls von $t=0$ bis $t=1 \cdot \Delta t$ mindestens um die Strecke $l \Delta x$ und höchstens um die Strecke $(l+1) \Delta x$ weiterbewegt.

Der Ort, an dem sich P mit der Geschwindigkeit v_t bewegt, bleibt daher mindestens innerhalb des Bereiches $\Delta x + l \Delta x$ und höchstens innerhalb des Bereiches $\Delta x + (l+1) \Delta x$ unbestimmt. Das Produkt aus Unbestimmtheitsbereich von Ort und Geschwindigkeit beträgt daher mindestens:

$$\Delta v_t \Delta X = (\Delta x / \Delta t) \cdot \Delta x (1+l). \quad (28)$$

Da l je nach der Geschwindigkeit von P alle Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen kann, läßt sich auch schreiben

$$\Delta v_t \Delta X \geq (\Delta x / \Delta t) \Delta x. \quad (29)$$

Ähnlich gilt für v_x :

$$\Delta(1/v_x) \cdot (1/\Delta X) \leq (\Delta t / \Delta x) \cdot (1/\Delta x). \quad (30)$$

Geht man zur mittleren Geschwindigkeit \bar{v} über, indem man die Einheiten Δt und Δx durch $\Delta t' = \Delta t / R$ und $\Delta x' = \Delta x / R$ ersetzt und dann über die Zeit $R \Delta t' = \Delta t$ mittelt, dann erhält man an Stelle von (28)

$$\bar{\Delta v}_t \Delta X = (\Delta x' / R \Delta t') \Delta x' (1 + lR). \quad (31)$$

Hier kann wieder das Produkt lR alle Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen, so daß gilt:

$$\bar{\Delta v}_t \Delta X \geq (\Delta x / R \Delta t) \Delta x. \quad (32)$$

Der Apostroph konnte in der letzten Ungleichung wieder weggelassen werden, da wir ja die absolute Größe von Δx und Δt nicht festgelegt haben.

Zur Übertragung der für die Punktmechanik abgeleiteten Beziehungen auf die Wellenmechanik benötigen wir das EHRENFESTSche Theorem⁶. Dieses besagt, daß sich der Schwerpunkt eines Wellenpaketes bewegt wie ein Massenpunkt in der Punktmechanik, sofern man die an jedem Element des Wellenpaketes angreifende Kraft mit dem Gewichtsfaktor $\Psi \Psi^* d\tau$ multipliziert und vektoriell in den Schwerpunkt überträgt⁷.

Zeit- und Längenmessungen lassen sich daher in der Wellenmechanik ebenso ausführen wie in der Punktmechanik, falls nur Δx und Δt „genügend groß“ sind⁸. Eine präzise Fassung dieses „genügend groß“ wird sich später bei der Untersuchung der Konvergenz der DIRAC-Gleichungen und der relativistischen SCHRÖDINGER-Gleichung von selbst ergeben; die Diskussion der notwendigen Größe von Δx und Δt sei bis dahin zurückgestellt.

Die bisherigen Überlegungen und Voraussetzungen lassen sich in zwei Postulaten zusammenfassen:

1. Der Ablauf eines physikalischen Vorganges soll durch Differenzengleichungen darstellbar sein. Die Einheiten der Differenzengleichungen – z. B. Δx und Δt – sollen gleich den Einheiten der Meßinstrumente sein, mit denen die Ergebnisse der Rechnung durch Messungen überprüft werden. Eine Maßangabe kann nicht genauer sein als die verwendete Maßeinheit.

⁶ P. EHRENFEST, Z. Phys. **45**, 455 [1927].

⁷ Wir übergehen die Darstellung von Wellenpaketen und die Ableitung des EHRENFESTSchen Satzes mit den Mitteln der Differenzenrechnung, um nicht zu weit vom Ziel dieser Arbeit abzukommen.

⁸ Falls Δx groß ist gegen die COMPTON-Wellenlänge des betrachteten Teilchens, dann ist der Koinzidenzbereich noch immer von der Größenordnung der COMPTON-Wellenlänge (vgl. dazu ²).

Der letzte Satz schließt Interpolationen bei der Messung aus. Eine genaue Interpolation entspricht nur einer Verfeinerung des Maßstabes.

2. Die Prüfbarkeit einer Rechnung durch eine Messung soll sich nicht nur auf ein Endresultat beschränken, sondern soll für alle Zwischenstufen der Rechnung gelten; diese Zwischenstufen sind durch Δx (Δy , Δz) und Δt bestimmt. Alle mechanischen Größen – wie Ort, Zeit, Impuls, Energie – sollen sich von Stufe zu Stufe mit der durch Δx und Δt bedingten Genauigkeit messen lassen.

Das zweite Postulat führt auf die schrittweise Lösung der als System von Differenzengleichungen angeschriebenen SCHRÖDINGER-Gleichung (6, 7).

Beide Postulate sind Sonderfälle des allgemeinen physikalischen Grundsatzes, daß eine physikalische Aussage nur Sinn hat, wenn sie sich zumindest prinzipiell durch eine Messung überprüfen läßt.

Abschließend sei hervorgehoben, daß in obigen Ausführungen nirgends ein starrer Maßstab vorausgesetzt wurde.

Heisenbergsche Unschärferelation

Aus Gl. (13) folgt – da die Masse m vorläufig als konstant vorausgesetzt wird – für den Impuls p_t :

$$p_t = m v_t = m l \Delta v_t = l(m \Delta v_t).$$

Die Toleranz von p_t beträgt nach Gl. (14):

$$\Delta p_t = +m \Delta v_t = +m \Delta x / \Delta t. \quad (33)$$

$$\text{Mit } p_t = l \Delta p_t \quad (34)$$

folgt weiter

$$E_t = p_t^2 / 2 m = l^2 (\Delta p_t)^2 / 2 m = l^2 \Delta E_t, \quad (35)$$

$$\Delta E_t = (\Delta p_t)^2 / 2 m = +\frac{1}{2} m \cdot (\Delta x)^2 / (\Delta t)^2; \quad (36)$$

l tritt hier im Quadrat auf. Der Energiemaßstab besitzt daher keine lineare, sondern eine quadratische Teilung, so wie beispielsweise die Skala eines elektrodynamischen Wattmeters.

Gl. (33) in (10) eingeführt liefert:

$$\Delta x \Delta p_t \geq 2 \hbar. \quad (37)$$

Aus (36) und (10) folgt:

$$\Delta E_t \Delta t \geq \hbar. \quad (38)$$

Diese beiden Ungleichungen entsprechen formal der HEISENBERGSCHEN Unschärferelation. Sie verknüpfen die Einheiten von Orts- und Impulsmaßstab sowie die von Energie- und Zeitmaßstab. Da auf Grund von (29) eine Maßangabe höchstens so genau wie

die verwendete Maßeinheit sein kann – was qualitativ unmittelbar einleuchtet –, begrenzen sie die erreichbare Genauigkeit einer Messung von Ort und Impuls oder Zeit und Energie.

Geht man von v_x statt von v_t aus, dann erhält man die reziproken Ausdrücke:

$$\begin{aligned} 1/p_x &= (1/m)(1/v_x), \\ \Delta(1/p_x) &= (1/m) \Delta(1/v_x) = + (1/m) (\Delta t / \Delta x). \end{aligned} \quad (39)$$

Ungleichung (10) läßt sich auch in der folgenden Form schreiben:

$$1/2 \hbar \geq (1/m) (\Delta t / \Delta x) (1/\Delta x). \quad (40)$$

Gl. (39) in (40) eingeführt liefert:

$$1/2 \hbar \geq \Delta(1/p_x) (1/\Delta x). \quad (41)$$

Für einen bestimmten Wert von $\Delta(1/p_x)$ darf Δx nicht zu klein sein, damit das Produkt

$$\Delta(1/p_x) (1/\Delta x)$$

nicht größer als $1/2 \hbar$ wird. Diese Beziehung ist der Unschärferelation (37) gleichwertig. Verwendet man schließlich die mittlere Geschwindigkeit v , dann erhält man⁹:

$$\bar{p} = m \bar{v} = L m (\Delta x / R \Delta t) = L \bar{\Delta p}_t. \quad (42)$$

$\bar{\Delta p}_t$ in (10) eingeführt liefert

$$m \Delta x (\Delta x / \Delta t) = R \Delta x m (\Delta x / R \Delta t) = R \Delta x \bar{\Delta p}_t \geq 2 \hbar. \quad (43)$$

R kann jeden beliebigen ganzzahligen Wert ≥ 1 annehmen. Da wir eine Beziehung erhalten wollen, die für jeden Wert von R gilt, müssen wir den ungünstigsten Fall betrachten:

$$\Delta x \bar{\Delta p}_t \geq 2 \hbar. \quad (44)$$

Während die Postulate 1 und 2 sicherstellen, daß die differenzenmechanische Rechnung alle durch Messungen überprüfbare Ergebnisse liefert, garantieren die Beziehungen (37), (38), (41) und (44), daß man nicht mehr erhält, als man messen kann.

Relativistische Schrödinger-Gleichung und Dirac-Gleichungen

Wir wollen nun die relativistische SCHRÖDINGER-Gleichung und die iterierten DIRAC-Gleichungen als Differenzengleichungen anschreiben und untersuchen,

⁹ m bedeutet in der nichtrelativistischen Theorie die Masse schlechthin, in der relativistischen Theorie die bewegte Masse.

wann ihre schrittweise Lösung konvergiert. Diese Gleichungen lauten für den feldfreien, eindimensionalen Fall:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (45)$$

und

$$\frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (46)$$

Beide Gleichungen können gemeinsam behandelt werden, wenn wir den Index k weglassen; die abzu-

leitende Konvergenzbedingung gilt dann für jede einzelne der vier DIRAC-Gleichungen.

Mit der Bezeichnung

$$d\Theta/dt = d^2 \Psi / dt^2 \quad (47)$$

erhält man die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (48)$$

und

$$d\Psi/dt = \int (d\Theta/dt) dt. \quad (49)$$

Für die Differentiale setzen wir wieder Differenzen:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{(\Delta x)^2} (\Psi_{l-1} - 2\Psi_l + \Psi_{l+1}), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rightarrow \frac{\Delta t \Psi}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} \rightarrow \frac{\Delta t \Theta}{\Delta t},$$

und die Differentialgleichung (48) geht in die Differenzengleichung

$$\Psi_{t, l-1} - 2\Psi_{t, l} + \Psi_{t, l+1} - \frac{(\Delta x)^2}{c^2 \Delta t} \Delta t \Theta_{t, l} - \frac{m_0^2 c^2 (\Delta x)^2}{\hbar^2} \Psi_{t, l} = 0 \quad (50)$$

über, die wir nach $\Delta t \Theta_{t, l}$ auflösen:

$$\Delta t \Theta_{t, l} = \frac{c^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(\Psi_{t, l-1} - 2\Psi_{t, l} + \Psi_{t, l+1} - \frac{m_0^2 c^2 (\Delta x)^2}{\hbar^2} \Psi_{t, l} \right). \quad (51)$$

Ferner gilt auf Grund von Gl. (49) :

$$\Delta t \Psi_{t, l} / \Delta t = \sum_{\vartheta=0}^t (\Delta t \Theta / \Delta t)_{\vartheta, l} \Delta t = \sum_{\vartheta=0}^t \Delta t \Theta_{\vartheta, l}, \quad (52)$$

so daß wir schließlich für die zeitliche Änderung von $\Psi_{t, l}$ an der Stelle l erhalten:

$$\Delta t \Psi_{t, l} = \frac{c^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \sum_{\vartheta=0}^t \left(\Psi_{\vartheta, l-1} - 2\Psi_{\vartheta, l} + \Psi_{\vartheta, l+1} - \frac{m_0^2 c^2 (\Delta x)^2}{\hbar^2} \Psi_{\vartheta, l} \right). \quad (53)$$

Der Wert von Ψ_l zur Zeit $t + \Delta t$ ist damit gegeben durch

$$\Psi_{t+\Delta t, l} = \Psi_{t, l} + \Delta t \Psi_{t, l} = \Psi_{t, l} + \frac{c^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \sum_{\vartheta=0}^t \left(\Psi_{\vartheta, l-1} - 2\Psi_{\vartheta, l} + \Psi_{\vartheta, l+1} - \frac{m_0^2 c^2 (\Delta x)^2}{\hbar^2} \Psi_{\vartheta, l} \right). \quad (54)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich wieder aus gegebenen Anfangswerten $\Psi_{0, l}$ schrittweise alle weiteren Werte $\Psi_{t, l}$ berechnen, vorausgesetzt, daß die Lösung konvergiert. Im Anhang II wird gezeigt, daß folgende Konvergenzbedingung erfüllt sein muß

$$(4c^2 (\Delta t)^2 / (\Delta x)^2) (1 + m_0^2 c^2 (\Delta x)^2 / 4\hbar^2) \leq 1. \quad (55)$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\Delta x / \Delta t \geq 2c, \quad (56)$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für den Grenzfall $\Delta x \rightarrow dx$ und damit auch $\Delta t \rightarrow dt$ gilt¹⁰. Das Vorzeichen von $2c$ ist eindeutig, da Δx und Δt ganz bestimmte Werte haben; normalerweise wird man für

Maßeinheiten positive Werte nehmen und erhält daher für $2c$ ein positives Vorzeichen. Verwendet man die in Fußnote 1 erwähnte Bezeichnungsweise und ersetzt $+\Delta x$ durch $|\pm \Delta x'| = \Delta x/2$, dann läßt sich (56) auch in der Form

$$\Delta x' / \Delta t \geq |\pm c| \quad (57)$$

schreiben (Δt geht über in $2\Delta t/2 = \Delta t$). (57) steht in Analogie zu der in der DIRACschen Theorie bekannten Operatorengleichung

$$dx/dt = \alpha c$$

¹⁰ Auch im Grenzfall bedeutet (56) die Toleranz einer Geschwindigkeit und nicht die Geschwindigkeit selbst. Vgl. dazu (13) und (14).

mit den Eigenwerten $+c$ und $-c$. Diese Gleichung besagt, daß der Meßwert für die Geschwindigkeit eines durch die DIRACschen Gleichungen beschriebenen Teilchens stets gleich der Lichtgeschwindigkeit sein soll. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, wurde dem Teilchen eine „Zitterbewegung“ um seine makroskopische Bahn zugeschrieben^{11, 12}. Die Amplitude dieser Zitterbewegung ist dabei von der Größenordnung der COMPTON-Wellenlänge des Teilchens und kann daher auf Grund der HEISENBERGSchen Unschärferelation prinzipiell nicht gemessen werden¹³. Die differenzenmechanische Beziehung (57) hingegen besagt nur, daß die Geschwindig-

keit v_t des Teilchens irgendeinen Wert zwischen $-c$ und $+c$ besitzt und sich keine genauere Aussage über diese Geschwindigkeit machen läßt; die Zitterbewegung wird nicht benötigt.

Da die „Augenblicksgeschwindigkeit“ v_t und daher auch der Augenblicksimpuls p_t vollkommen unbestimmt sind, wollen wir uns der mittleren Geschwindigkeit v zuwenden. Die Toleranz bei der Messung dieser mittleren Geschwindigkeit beträgt auf Grund von (56) :

$$\Delta x/R \Delta t \geq 2 c/R \quad (58)$$

und kann somit beliebig klein gemacht werden.

Es fragt sich, ob die Ungleichung (55) in eine Form gebracht werden kann, die zumindest im nicht-relativistischen Grenzfall in die HEISENBERGSche Unschärferelation (44) übergeht. Für diese Umformung kann man (55) auf der rechten Seite mit dem Quadrat des Ausdrückes

$$1 + (\Delta x)^2 m_0^2 c^2 / 4 \hbar^2 \quad (59)$$

multiplizieren und dividieren:

$$(4 c^2 (\Delta t)^2 / (\Delta x)^2) (1 + (\Delta x)^2 m_0^2 c^2 / 4 \hbar^2) \leq \frac{(1 + (\Delta x)^2 m_0^2 c^2 / 4 \hbar^2)^2}{(1 + (\Delta x)^2 m_0^2 c^2 / 4 \hbar^2)^2}.$$

Nach Kürzen und Herausheben des Faktors $4 \hbar^2 / (\Delta x)^2 m_0^2 c^2$ erhält man

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \frac{4^2 \hbar^2}{m_0^2} \left(1 + \frac{4 \hbar^2}{(\Delta x)^2 m_0^2 c^2} \right)^{-1} \leq (1 + (\Delta x)^2 m_0^2 c^2 / 4 \hbar^2)^{-2}.$$

Zieht man die Wurzel und führt auf Grund von (42)

$$\bar{\Delta p}_t = (\Delta x / R \Delta t) m \quad (60)$$

ein, dann erhält man nach einer einfachen Umstellung der Glieder¹⁴:

$$R \Delta x \bar{\Delta p}_t \geq 4 \hbar (m/m_0) \cdot (1 + 4 \hbar^2 / (\Delta x)^2 m_0^2 c^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + (\Delta x)^2 m_0^2 c^2 / 4 \hbar^2). \quad (61)$$

Die linke Seite dieser Beziehung ist identisch mit der linken Seite von (43).

Setzt man für $(\Delta x)^2$ aus (56) in den ersten oder zweiten Klammerausdruck ein, dann erhält man die weiteren Beziehungen¹⁵:

$$R \Delta x \bar{\Delta p}_t \geq 4 \hbar (m/m_0) \cdot (1 + \hbar^2 / (\Delta t)^2 m_0^2 c^4)^{-\frac{1}{2}} (1 + (\Delta x)^2 m_0^2 c^2 / 4 \hbar^2), \quad (62)$$

$$R \Delta x \bar{\Delta p}_t \geq 4 \hbar (m/m_0) \cdot (1 + 4 \hbar^2 / (\Delta x)^2 m_0^2 c^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + (\Delta t)^2 m_0^2 c^4 / \hbar^2). \quad (63)$$

Fordert man wie früher Konvergenz für jeden Wert von R , dann muß man den ungünstigsten Fall betrachten und erhält aus (63) :

$$\Delta x \bar{\Delta p}_t \geq 4 \hbar (m/m_0) \cdot (1 + 4 \hbar^2 / (\Delta x)^2 m_0^2 c^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + (\Delta t)^2 m_0^2 c^4 / \hbar^2). \quad (64)$$

Der zweite Klammerausdruck nimmt nur Werte größer oder gleich 1 an, so daß man ihn so wie in Ungleichung (56) weglassen kann:

$$\Delta x \bar{\Delta p}_t \geq 4 \hbar (m/m_0) \cdot (1 + 4 \hbar^2 / (\Delta x)^2 m_0^2 c^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (65)$$

¹¹ E. SCHRÖDINGER, Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik, Mitt. preuß. Akad. Wiss., Phys. math. Klasse, 31. 7. 1930, S. 418–428.

¹² L. L. FOLDY u. S. A. WOUTHUYSEN, Phys. Rev. **78**, 29–36 [1950].

¹³ Die Unschärfe des Impulses würde bei so genauer Ortsmessung gleich $m_0 c$ werden.

¹⁴ Die Unbestimmtheit von m ist von zweiter Ordnung in $\Delta x / R \Delta t$ und wird daher vernachlässigt.

¹⁵ Man kann $(\Delta x)^2$ auch aus der Beziehung (55) einsetzen, wobei man zum selben Endresultat kommt.

Das Gleichheitszeichen gilt hier nur für $\Delta t \rightarrow dt$. Der Sinn dieser Beziehung ist etwas verschieden von dem der nichtrelativistischen Unschärferelation. Wir gehen jedoch darauf nicht ein, da wir uns in dieser Arbeit hauptsächlich für den Übergang $\Delta x \rightarrow dx$ und $\Delta t \rightarrow dt$ interessieren, wobei die Glieder

$$(\Delta x)^2 m_0^2 c^2 / 4 \hbar^2 \text{ und } (\Delta t)^2 m_0^2 c^4 / \hbar^2 \quad (66)$$

in (61), (62) und (63) exakt verschwinden.

Aus (62) folgt die (65) entsprechende Beziehung für die Zeit:

$$\Delta x \Delta p_t \leq 4 \hbar (m/m_0) \cdot (1 + \hbar^2 / (\Delta t)^2 m_0^2 c^4). \quad (67)$$

Falls der relativistische Massenzuwachs vernachlässigbar ist

$$m = m_0, \quad (68)$$

die Einheit des Ortsmaßstabes groß gegen die COMPTON-Wellenlänge ist

$$\Delta x \gg |2 \hbar / m_0 c|, \quad (69)$$

und schließlich die Einheit des Zeitmaßstabes groß gegen die Periode der COMPTON-Welle ist

$$\Delta t \gg |\hbar / m_0 c^2|, \quad (70)$$

dann nehmen diese beiden Ungleichungen (65) und (67) folgende Form an:

$$\Delta x \Delta p_t \geq 4 \hbar, \quad (71)$$

die sich nur durch einen Faktor 2 von der HEISENBERGSchen Unschärferelation (44) unterscheidet. Es ist zu vermuten, daß der Faktor 2 daher kommt, daß die relativistischen Gleichungen Teilchen mit positiver und negativer Masse beschreiben, die nicht-relativistische SCHRÖDINGER-Gleichung hingegen nur solche mit positiver Masse. Wir werden noch darauf zurückkommen.

Aus dem relativistischen Energiesatz

$$E^{*2} = c^2 (p^2 + m_0^2 c^2) \quad (72)$$

erhält man ähnlich wie im nichtrelativistischen Fall als Beziehung zwischen den Maßeinheiten für Energie und Impuls:

$$\Delta E^{*2} = c^2 (\Delta p)^2, \quad \Delta \bar{E}_t^* = c \Delta p_t, \quad (73)$$

denn die Konstante $m_0^2 c^2$ geht nicht in die Maßeinheit ein.

Gl. (73) in Ungleichung (65) eingeführt liefert:

$$\frac{\Delta x}{c} \Delta \bar{E}_t^* \geq 4 \hbar \frac{m}{m_0} \left(1 + \frac{4 \hbar^2}{m_0^2 c^2 (\Delta x)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Diese Ungleichung geht durch Multiplikation mit

der Beziehung (56) aus der Ungleichung

$$\Delta \bar{E}_t^* \Delta t \geq 2 \hbar \frac{m}{m_0} \left(1 + \frac{4 \hbar^2}{m_0^2 c^2 (\Delta x)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (74)$$

hervor. Auf gleiche Weise erhält man aus (67) die Ungleichung

$$\Delta \bar{E}_t^* \Delta t \geq 2 \hbar \frac{m}{m_0} \left(1 + \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^4 (\Delta t)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (75)$$

Diese beiden Ungleichungen vereinfachen sich unter den Voraussetzungen (68), (69) und (70) bis auf einen Faktor 2 zur HEISENBERGSchen Unschärferelation in der Energie-Zeit-Form.

Diskussion der Ergebnisse

Die Ungleichungen (44), (56), (65), (67), (74) und (75) wurden rein formal aus den als Differenzengleichungen angeschriebenen SCHRÖDINGERSchen beziehungsweise DIRACSchen Gleichungen gewonnen. Da die Differenzengleichungen die Differentialgleichungen als Sonderfall enthalten, sind diese Ungleichungen immer richtig, wenn die SCHRÖDINGER- und DIRAC-Gleichungen richtig sind und man das Postulat 2 voraussetzt. In keiner der obigen Beziehungen wurde ein endlicher Wert für Δx und Δt vorausgesetzt. Nur Kombinationen von Δx und Δt , in denen diese Größen als Quotienten auftreten, haben endliche Werte.

Im folgenden wird untersucht, wieweit die Beziehungen (65), (67), (74) und (75) mit dem Experiment im Einklang stehen. Zunächst seien jedoch einige theoretische Gründe hervorgehoben, die für diese Ungleichungen sprechen.

1. Wie bereits gezeigt, vereinfachen sich diese Ungleichungen zur HEISENBERGSchen Unschärferelation, wenn die Bedingungen (68), (69) und (70) erfüllt sind.

2. Dieselben Ungleichungen folgen, wie im Anhang III gezeigt wird, aus den formal ganz verschiedenen linearisierten DIRAC-Gleichungen.

3. Im Anhang III wird gezeigt, daß diese Ungleichungen nicht nur im eindimensionalen Fall gelten, sondern daß sie inhaltlich unabhängig sind von der Zahl der Dimensionen. Ebenso liefert die Berücksichtigung von Kraftfeldern die gleichen, bzw. geringfügig verschiedene Ergebnisse (Anhang IV). Weiterhin hat sich gezeigt, daß diese Ungleichungen formal erhalten bleiben, wenn man von verschiedenen Darstellungen der Matrizen α_1 , α_2 , α_3 und β in den DIRAC-Gleichungen ausgeht; eine allgemeine

Untersuchung über ihre Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen steht allerdings noch aus.

Wir wenden uns nun der experimentellen Überprüfung der Ungleichungen (65), (67), (74) und (75) zu. Das Auftreten des Faktors m/m_0 ist für eine relativistische Theorie nicht verwunderlich. Die Glieder $4\hbar^2/m_0^2 c^2 (\Delta x)^2$ und $\hbar^2/m_0^2 c^4 (\Delta t)^2$ geben jedoch eine unerwartete Abweichung von der HEISENBERGSchen Unschärferelation, falls Δx nicht groß gegen die COMPTON-Wellenlänge und Δt nicht groß gegen ihre Periodendauer ist. Für ein Teilchen mit der Masse des Elektrons gelten die numerischen Werte

$$\Delta x \geq 0,77 \cdot 10^{-10} \text{ cm und } \Delta t \geq 1,3 \cdot 10^{-21} \text{ sec.}$$

In der Atomhülle kennt man den Ort eines Elektrons auf rund 10^{-8} cm genau, so daß

$$4\hbar^2/m_0^2 c^2 (\Delta x)^2$$

von der Ordnung 10^{-4} wird. Die Abweichung von der HEISENBERGSchen Unschärferelation ist daher unmerklich klein. Ganz anders sind die Verhältnisse, wenn man den Ort eines Elektrons viel genauer als auf 10^{-10} cm festlegen kann, beispielsweise bei Elektronen im Kernbereich. Wenn Δx klein ist gegen die COMPTON-Wellenlänge, geht Ungl. (65) über in¹⁶:

$$\bar{\Delta p_t} \geq 2 m c. \quad (76)$$

Mit Hilfe von (56) erhält man daraus:

$$\bar{\Delta E_t^*} \geq 2 m c^2. \quad (77)$$

Die Maßeinheit für den an einem beliebigen Radius r angreifenden Drehimpuls beträgt schließlich¹⁷:

$$r \bar{\Delta p_t} = \bar{\Delta p_\varphi} \geq 2 m c r. \quad (78)$$

Ein Teilchen von der Masse des Elektrons, dessen Ort mit wesentlich größerer Genauigkeit als 10^{-10} cm bekannt ist, kann danach jede Energie zwischen $-m c^2$ und $+m c^2$ haben, sein Impuls kann jeden Wert zwischen $-m c$ und $+m c$ besitzen und sein Drehimpuls jeden Wert zwischen $-m c r$ und $+m c r$ ¹⁸.

Die Möglichkeit negativer Energiewerte ist durch

¹⁶ Mit der in Fußnote 1 erwähnten Bezeichnungsweise könnte man auch $\bar{\Delta p_t} \geq |\pm m c|$ schreiben, worauf wir künftig nicht mehr eingehen.

¹⁷ Wegen der Voraussetzung Δx klein gegen die COMPTON-Wellenlänge ist r als beliebig genau meßbar anzunehmen.

das Auftreten negativer Massen in der relativistischen Wellenmechanik gegeben.

Die Ungleichungen (76), (77) und (78) behaupten, daß man die Gültigkeit von Energie- und Impulssatz nicht nachprüfen kann, wenn der Unschärfebereich der Ortsmessung klein ist gegen die COMPTON-Wellenlänge des betrachteten Teilchens oder die Unschärfe der Zeitmessung klein ist gegen die Periode der COMPTON-Welle. Diese Aussage der relativistischen Unschärferelation steht in Parallele zur Behauptung der HEISENBERGSchen Unschärferelation, daß sich der Kausalitätssatz in seiner klassischen Form nicht experimentell prüfen läßt. Ebenso wie die HEISENBERGSche Unschärferelation lassen sich auch die relativistischen Unschärferelationen durch die in den SCHRÖDINGER- und DIRAC-Gleichungen enthaltene Wellenvorstellung erklären. Betrachtet man als einfachsten Fall einer Welle einen elektrischen Wechselstrom $i = I \sin \omega t$ und fragt nach der Energie, die er im Widerstand R während der Zeit $T \ll 1/\omega$ dissipiert, dann kann diese Energie jeden Wert zwischen 0 und $I^2 R T$ annehmen. Eine „Augenblicksenergie“ oder „Augenblicksleistung“ läßt sich nicht definieren, sondern nur ihr Mittelwert genommen über viele Perioden¹⁹. Den gleichen Wert erhält man offenbar auch bei der Mittelung über viele Werte von $i^2 R T$, falls diese voneinander statistisch unabhängig sind (im Sinne des zweiten MISSESchen Axioms). In diesem statistischen Sinne lassen sich Energie- und Impulssatz auch bei Gültigkeit von (76), (77) und (78) beibehalten.

Die HEISENBERGSche Unschärferelation (44) liefert für

$$\Delta x \leq \hbar/m_0 c$$

den zu großen Wert

$$\bar{\Delta p_t} \geq m_0 c. \quad (79)$$

Ebenso folgt aus (38) für $\Delta t \leq \hbar/m_0 c^2$:

$$\bar{\Delta E_t} \geq m_0 c^2. \quad (80)$$

Der Faktor 2 fehlt, da in der nichtrelativistischen Theorie keine negativen Massen auftreten. Ebenso ist auch m durch m_0 ersetzt.

Man schließt aus (79) oft, daß die Unschärfe des Ortes eines Elektrons mindestens gleich seiner

¹⁸ Bei der Durchrechnung der dreidimensionalen DIRAC-Gleichungen in Anhang III erhält man noch die Forderung nach vollkommener Unbestimmtheit der Richtung des Impulses.

¹⁹ Die Mittelung über genau eine Periode ist nur bei einer monochromatischen Welle möglich.

COMPTON-Wellenlänge sein müsse, und daher Elektronen weder im Atomkern noch in seiner unmittelbaren Umgebung auftreten können. Die relativistischen Unschärferelationen (76), (77) und (78) verbieten eine so genaue Lokalisierung an sich nicht, sie erklären sie nur für sinnlos, da von den meßbaren Eigenschaften des Elektrons nur die Ladung bestimmt bleibt²⁰.

Man könnte versucht sein, die Beziehungen (76) bis (78) auf die β -Emission anzuwenden, da sie eine qualitative Erklärung des kontinuierlichen Energie- und Impulsspektrums dieser Teilchen ohne Neutrinohypothese gestatten. Dies wäre jedoch eine bedenkliche Verallgemeinerung der für die DIRACsche Ein-Partikel Theorie abgeleiteten Beziehungen.

Wenn Δt klein ist gegen die Periode der COMPTON-Welle des betrachteten Teilchens, gehen (67) und (75) in (76), (77) und (78) über. Als Beispiel dafür betrachten wir ein Teilchen mit der Masse m . Seiner Energie mc^2 entspricht eine Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$2\pi\nu = \omega = mc^2/\hbar.$$

Die Forderung $\Delta t \ll \hbar/m_0 c^2$ bedeutet, daß man diese Schwingung während der Zeit Δt betrachtet, die klein ist gegen die Schwingungsdauer $T = \hbar/mc^2$ (Abb. 4). Wir können ihre Frequenz in dieser Zeit beispielsweise durch Messen der Neigung der Tangente in einem Punkt feststellen²¹. Diese nimmt alle Werte zwischen $y' = -\omega$ im Punkte A und $y' = +\omega$ im Punkte B an; die entsprechenden Werte der Energie liegen zwischen $-\hbar\omega = -mc^2$ und $\hbar\omega = +mc^2$, in Übereinstimmung mit der Forderung $\Delta E_t^* \geq 2mc^2$. Negative Werte von ω müssen zugelassen werden, da auch negative Werte von m zu berücksichtigen sind.

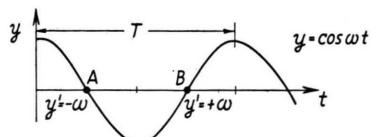


Abb. 4. Frequenzmessung durch Differenzieren.

²⁰ Für schwere Teilchen machen die Abweichungen von der HEISENBERGSchen Unschärferelation auch im Kernbereich wenig aus, denn die COMPTON-Wellenlänge des Protons beträgt nur $4 \cdot 10^{-14}$ cm. Es ist allerdings eine Verallgemeinerung, wenn man die aus den DIRAC-Gleichungen und der relativistischen SCHRÖDINGER-Gleichung abgeleiteten Beziehungen auf schwere Teilchen anwendet. Läßt man diese Verallgemeinerung zu, dann besteht nach (65) und (74) ein beträchtlicher Unterschied zwischen Teilchen,

Zusammenfassung

Die HEISENBERGSche Unschärferelation läßt sich formal als Konvergenzbedingung der als Differenzengleichung angeschriebenen potentialfreien SCHRÖDINGER-Gleichung ableiten. Ebenso folgen aus der relativistischen SCHRÖDINGER-Gleichung (KLEIN-GORDONSche Gleichung) und den DIRAC-Gleichungen zwei verallgemeinerte Unschärferelationen (65) und (67). Diese reduzieren sich auf die HEISENBERGSche Unschärferelation, wenn der relativistische Massenzuwachs vernachlässigbar ist, wenn die Unschärfe des Ortes groß gegen die COMPTON-Wellenlänge ist und wenn die Unschärfe der Zeit groß gegen die entsprechende Schwingungsdauer ist (71); in anderen Fällen treten wesentliche Unterschiede auf (76), (77), (78). Die Berücksichtigung von Kraftfeldern in den DIRAC-Gleichungen bringt nur geringfügige Abweichungen gegenüber dem feldfreien Fall (IV, 3), (IV, 4).

Die vorliegende Arbeit entstand, als bei der Ausarbeitung neuer, für elektronische Rechenmaschinen geeigneter Lösungsverfahren für verschiedene partielle Differentialgleichungen Schwierigkeiten mit der Konvergenz der Lösungen aufraten. In diesem Zusammenhange danke ich Herrn Prof. E. SKUDRZYK, Technische Hochschule Wien, für seine andauernde große Unterstützung. Herrn Dozenten K. PRACHAR, Universität Wien, danke ich für Hilfe in mathematischen Fragen. Besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. G. GOUBEAU, Signal Corps Engineering Laboratories, Ft. Monmouth, N. J., durch dessen Anregungen der Abschnitt über Messungen mit Maßstäben endlicher Feinheit zustande kam. Weiter danke ich für Unterstützung in physikalischen Fragen Herrn Prof. K. MORRISON und Herrn Dr. ÜBERALL, Cornell University, Ithaca, N. Y., Herrn Doz. N. MUELLER, Air Force Research Center, Cambridge, Mass., und Herrn Doz. N. ROBL, Universität Wien.

Anhang I Konvergenzbedingung für die Schrödinger-Gleichung

Zur Untersuchung der Konvergenz des in der Einführung besprochenen Lösungsverfahrens für die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung nehmen wir an, $\varphi_{t,l-2}, \varphi_{t,l-1}, \varphi_{t,l}, \varphi_{t,l+1}$ und $\varphi_{t,l+2}$ (Abb. 5) wären mit Fehlern $f_{t,l-2}, \dots, f_{t,l+2}$ behaftet. Aus den Gln. (6) und (9) erhält man die fehlerhaften Werte

deren klassischer Durchmesser groß oder klein gegen ihre COMPTON-Wellenlänge ist.

²¹ Das Differenzieren einer Schwingung der Frequenz mc^2/\hbar ist praktisch wohl kaum möglich; bei den niedrigeren Frequenzen der Fernmeldetechnik bestimmt man jedoch häufig durch Differenzieren mit Kondensator und Widerstand die höchste auftretende Frequenz in einem Frequenzgemisch.

$\psi_{t,l-1}^*$, $\psi_{t,l}$ und $\psi_{t,l+1}^*$. Die Gln. (7) und (8) liefern dann $\varphi_{t+\Delta t,l} = \varphi_{t,l} + f_{t,l} + \Delta t \varphi_{t,l} + \Delta t \varphi_{t+\Delta t,l}^*$.

Ausführlich geschrieben beträgt der fehlerhafte Wert von $\Delta t \varphi$ auf Grund von Gl. (6) ($\alpha = (\hbar \Delta t) / [2m(\Delta x)^2]$):

$$\begin{aligned}\Delta t \varphi_{t,l-1}^* &= a[\varphi_{t,l-2} + \varphi_{t,l} - 2(\varphi_{t,l-1} + f_{t,l-1}) + f_{t,l-2} + f_{t,l}] \\ &= a[\varphi_{t,l-2} - 2\varphi_{t,l-1} + \varphi_{t,l} + f_{t,l-2} - 2f_{t,l-1} + f_{t,l}] \\ &= \Delta t \psi_{t,l} + a(f_{t,l-2} - 2f_{t,l-1} + f_{t,l}), \\ \Delta t \varphi_{t,l}^* &= \Delta t \psi_{t,l} + a(f_{t,l-1} - 2f_{t,l} + f_{t,l+1}), \\ \Delta t \varphi_{t,l+1}^* &= \Delta t \psi_{t,l+1} + a(f_{t,l} - 2f_{t,l+1} + f_{t,l+2}).\end{aligned}$$

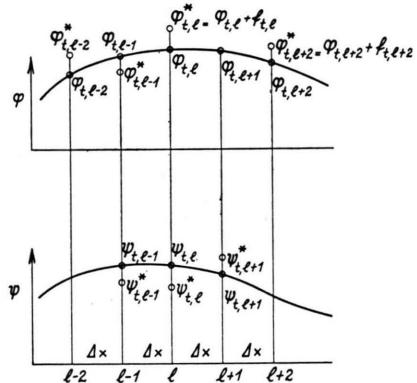


Abb. 5. φ , ψ und die fehlerbehafteten Werte φ^* , ψ^* .

Aus Gl. (9) folgt damit:

$$\begin{aligned}\varphi_{t+\Delta t,l-1}^* &= \psi_{t,l-1} + \Delta t \psi_{t,l-1}^* = \psi_{t,l-1} + \Delta t \psi_{t,l-1} + a(f_{t,l-2} - 2f_{t,l-1} + f_{t,l}) \\ &= \psi_{t+\Delta t,l-1} + a(f_{t,l-2} - 2f_{t,l-1} + f_{t,l}), \\ \varphi_{t+\Delta t,l}^* &= \psi_{t+\Delta t,l} + a(f_{t,l-1} - 2f_{t,l} + f_{t,l+1}), \\ \varphi_{t+\Delta t,l+1}^* &= \psi_{t+\Delta t,l+1} + a(f_{t,l} - 2f_{t,l+1} + f_{t,l+2}).\end{aligned}$$

Diese Werte in Gl. (7) eingesetzt liefern:

$$\begin{aligned}\Delta t \varphi_{t+\Delta t,l}^* &= -a(\psi_{t+\Delta t,l-1} - 2\psi_{t+\Delta t,l} + \psi_{t+\Delta t,l+1}) - a^2(f_{t,l-2} - 4f_{t,l-1} + 6f_{t,l} - 4f_{t,l+1} + f_{t,l+2}) \\ &= \Delta t \varphi_{t+\Delta t,l} - a^2(f_{t,l-2} - 4f_{t,l-1} + 6f_{t,l} - 4f_{t,l+1} + f_{t,l+2}),\end{aligned}$$

und aus Gl. (8) erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}\varphi_{t+2\Delta t,l}^* &= \varphi_{t,l} + f_{t,l} + \Delta t \varphi_{t,l} + \Delta t \varphi_{t+\Delta t,l} - a^2(f_{t,l-2} - 4f_{t,l-1} + 6f_{t,l} - 4f_{t,l+1} + f_{t,l+2}) \\ &= \varphi_{t+2\Delta t,l} + f_{t,l} - a^2(f_{t,l-2} - 4f_{t,l-1} + 6f_{t,l} - 4f_{t,l+1} + f_{t,l+2}).\end{aligned}\quad (\text{I}, 1)$$

Der Fehler steigt also beim Fortschreiten von t zu $t+2\Delta t$ von $f_{t,l}$ auf

$$f_{t+2\Delta t,l} = f_{t,l} - a^2(f_{t,l-2} - 4f_{t,l-1} + 6f_{t,l} - 4f_{t,l+1} + f_{t,l+2}) \quad (\text{I}, 2)$$

an. Allgemein gilt für den Schritt von $t+r\Delta t$ nach $t+(r+2)\Delta t$:

$$f_{t+(r+2)\Delta t,l} = f_{t+r\Delta t,l} - a^2(f_{t+r\Delta t,l-2} - 4f_{t+r\Delta t,l-1} + 6f_{t+r\Delta t,l} - 4f_{t+r\Delta t,l+1} + f_{t+r\Delta t,l+2}). \quad (\text{I}, 3)$$

Aus Gl. (I, 2) folgen unmittelbar die Werte der Fehler an den Stellen $l-2$, $l-1$, $l+1$ und $l+2$:

$$\begin{aligned}f_{t+2\Delta t,l-2} &= f_{t,l-2} - a^2(f_{t,l-4} - 4f_{t,l-3} + 6f_{t,l-2} - 4f_{t,l-1} + f_{t,l}), \\ f_{t+2\Delta t,l-1} &= f_{t,l-1} - a^2(f_{t,l-3} - 4f_{t,l-2} + 6f_{t,l-1} - 4f_{t,l} + f_{t,l+1}), \\ f_{t+2\Delta t,l+1} &= f_{t,l+1} - a^2(f_{t,l-1} - 4f_{t,l} + 6f_{t,l+1} - 4f_{t,l+2} + f_{t,l+3}), \\ f_{t+2\Delta t,l+2} &= f_{t,l+2} - a^2(f_{t,l} - 4f_{t,l+1} + 6f_{t,l+2} - 4f_{t,l+3} + f_{t,l+4}).\end{aligned}\quad (\text{I}, 4)$$

Diese Werte mit dem der Gl. (I, 2) in (I, 3) eingesetzt geben den Fehler $f_{t+4\Delta t,l}$:

$$\begin{aligned}f_{t+4\Delta t,l} &= f_{t,l} - 2a^2(f_{t,l-2} - 4f_{t,l-1} + 6f_{t,l} - 4f_{t,l+1} + f_{t,l+2}) \\ &\quad + a^4(f_{t,l-4} - 8f_{t,l-3} + 28f_{t,l-2} - 56f_{t,l-1} + 70f_{t,l} - 56f_{t,l+1} + 28f_{t,l+2} - 8f_{t,l+3} + f_{t,l+4}).\end{aligned}\quad (\text{I}, 5)$$

Ersetzen von l durch $l-2$, $l-1$, $l+1$ und $l+2$ liefert die Fehler $f_{t+4\Delta t,l-2}$, $f_{t+4\Delta t,l-1}$, $f_{t+4\Delta t,l+1}$ und $f_{t+4\Delta t,l+2}$; aus Gl. (I, 3) folgt damit:

$$\begin{aligned}
f_{t+6 \Delta t, l} = & f_{t, l} - 3 a^2 (f_{t, l-2} - 4 f_{t, l-1} + 6 f_{t, l} - 4 f_{t, l+1} + f_{t, l+2}) \\
& + 3 a^4 (f_{t, l-4} - 8 f_{t, l-3} + 28 f_{t, l-2} - 56 f_{t, l-1} + 70 f_{t, l} - 56 f_{t, l+1} + 28 f_{t, l+2} - 8 f_{t, l+3} + f_{t, l+4}) \\
& - a^6 (f_{t, l-6} - 12 f_{t, l-5} + 66 f_{t, l-4} - 220 f_{t, l-3} + 495 f_{t, l-2} - 792 f_{t, l-1} + 924 f_{t, l} - 792 f_{t, l+1} \\
& + 495 f_{t, l+2} - 220 f_{t, l+3} + 66 f_{t, l+4} - 12 f_{t, l+5} + f_{t, l+6}).
\end{aligned} \tag{I, 6}$$

Durch Vergleich der Gln. (I, 2), (I, 5) und (I, 6) erkennt man, daß die Koeffizienten in und vor den Klammern Binomialkoeffizienten sind, so daß man alle weiteren Fehler $f_{t+2r \Delta t, l}$ ohne weitere Rechnung anschreiben kann. Betrachtet man einen Punkt l , für den

$$|f_{t, l}| \geq |f_{t, l \pm i}| \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

ist, dann erkennt man aus den Gln. (I, 2), (I, 5) und (I, 6), daß der für die Konvergenz ungünstigste Fall vorliegt, wenn gilt

$$f_{t, l \pm i} = \begin{cases} f_{t, l} & \text{für } i = 2k \\ -f_{t, l} & \text{für } i = 2k+1, \end{cases}$$

da sich dann die Glieder in den Klammern alle addieren.

Man erhält damit:

$$\begin{aligned}
f_{t+2 \Delta t, l, \text{extr}} &= f_{t, l}(1 - 16 a^2), \\
f_{t+4 \Delta t, l, \text{extr}} &= f_{t, l}(1 - 2 \cdot 16 a^2 + 16^2 a^4) \\
&= f_{t, l}(1 - 16 a^2)^2, \\
f_{t+6 \Delta t, l, \text{extr}} &= f_{t, l}(1 - 3 \cdot 16 a^2 + 3 \cdot 16^2 a^4 - 16^3 a^6) \\
&= f_{t, l}(1 - 16 a^2)^3.
\end{aligned} \tag{I, 8}$$

Allgemein gilt:

$$f_{t+2r \Delta t, l, \text{extr}} = f_{t, l}(1 - 16 a^2)^r. \tag{I, 9}$$

Für die Konvergenz des Fehlers ohne Vorzeichenwechsel bei beliebigem Anfangsfehler $f_{t, l}$ ist die Bedingung erforderlich:

$$\begin{aligned}
16 a^2 &\leq 1, \\
1/a &= (2 m/\hbar) \cdot ((\Delta x)^2 / \Delta t) \geq 4. \tag{I, 10}
\end{aligned}$$

Es ist noch zu begründen, warum bei der Ungleichung (I, 10) ≤ 1 und nicht ≤ 2 geschrieben wurde. Man sieht leicht, daß die Forderung ≤ 2 zwar auch noch für die Konvergenz des Fehlers genügt, daß der Fehler jedoch positives oder negatives Vorzeichen annehmen kann. Für die strengere Forderung ≤ 1 behält der Fehler immer das gleiche Vorzeichen. Abb. 6 zeigt einen Maßstab mit den Meßmarken m_1, m_2, m_3, \dots . Einem

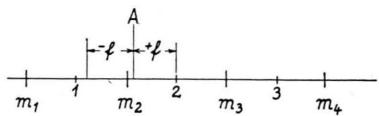


Abb. 6. Wechselndes Vorzeichen von f .

Meßwert, der zwischen den Marken m_1 und m_2 liegt, schreiben wir den Meßwert 1 zu; ebenso sprechen wir einem Meßwert zwischen m_2 und m_3 den Wert 2 zu usw. Angenommen, ein Meßwert A liege zwischen den Marken m_2 und m_3 in unmittelbarer Nähe von m_2 . Wir schreiben ihm den Wert 2 zu und machen dabei den Fehler $+f$. Der Wert A solle konstant bleiben. Berechneten wir den Wert von A zu einem späteren Zeitpunkt und forderten dabei nur Konvergenz des Fehlers mit wechselndem Vorzeichen, dann könnte der berechnete Wert von A zwischen den Marken m_1 und m_2 liegen, während der gemessene Wert zwischen m_2 und m_3 läge. Rechnung und Messung stimmten nicht mehr überein; durch die Forderung nach Konvergenz und gleichbleibendem Vorzeichen des Fehlers wird dieser Unterschied zwischen Rechnung und Messung vermieden.

Anhang II

Konvergenzbedingung für die relativistische Schrödinger-Gleichung und die iterierten Dirac-Gleichungen

Mit den Gln. (53) und (54) lassen sich aus gegebenen Anfangswerten $\Psi_{0, l}$ schrittweise alle weiteren Werte $\Psi_{t, l}$ berechnen. Um die Konvergenz des Verfahrens zu untersuchen, nehmen wir an, daß $\Psi_{t, l-1}$, $\Psi_{t, l}$ und $\Psi_{t, l+1}$ mit Fehlern behaftet sind. Die mit einem Stern bezeichneten fehlerhaften Werte betragen:

$$\Psi_{t, l-1}^*, \Psi_{t, l-1}^* + f_{t, l-1}, \Psi_{t, l}^*, \Psi_{t, l}^* + f_{t, l}, \Psi_{t, l+1}^*, \Psi_{t, l+1}^* + f_{t, l+1}.$$

Durch Einsetzen in Gl. (53) erhalten wir den Fehler der zeitlichen Änderung von $\Psi_{t, l}^*$:

$$\begin{aligned}
\Delta_t \Psi_{t, l}^* = & a_x^2 \sum_{\vartheta=0}^{t-\Delta t} (\Psi_{\vartheta, l-1}^* - 2 \Psi_{\vartheta, l}^* + \Psi_{\vartheta, l+1}^* - b_x^2 \Psi_{\vartheta, l}^*) \\
& + a_x^2 [\Psi_{t, l-1}^* + f_{t, l-1} - 2(\Psi_{t, l}^* + f_{t, l}) + \Psi_{t, l+1}^* + f_{t, l+1} - b_x^2 (\Psi_{t, l}^* + f_{t, l})],
\end{aligned}$$

wobei $a_x^2 = c^2 (\Delta t)^2 / (\Delta x)^2$, $b_x^2 = m_0^2 c^2 (\Delta x)^2 / \hbar^2$.

Auf Grund der Gleichung

$$\Psi_{t+\Delta t, l}^* = \Psi_{t, l}^* + \Delta_t \Psi_{t, l}^* = \Psi_{t, l}^* + \Delta_t \Psi_{t, l}^* + f_{t+\Delta t, l}$$

beträgt der Fehler $f_{t+\Delta t, l}$ zur Zeit $t + \Delta t$:

$$f_{t+\Delta t, l} = f_{t, l} - a_x^2 (-f_{t, l-1} + 2f_{t, l} - f_{t, l+1} + b_x^2 f_{t, l}). \quad (\text{II}, 1)$$

Der Fehler zur Zeit $t + 2\Delta t$ beträgt:

$$f_{t+2\Delta t, l} = f_{t+\Delta t, l} - a_x^2 (-f_{t+\Delta t, l-1} + 2f_{t+\Delta t, l} - f_{t+\Delta t, l+1} + b_x^2 f_{t, l}). \quad (\text{II}, 2)$$

$f_{t+\Delta t, l-1}$ und $f_{t+\Delta t, l+1}$ sind in dieser Gleichung gegeben durch:

$$f_{t+\Delta t, l-1} = f_{t, l-1} - a_x^2 (-f_{t, l-2} + 2f_{t, l-1} - f_{t, l} + b_x^2 f_{t, l-1}) \quad (\text{II}, 3)$$

und $f_{t+\Delta t, l+1} = f_{t, l+1} - a_x^2 (-f_{t, l} + 2f_{t, l+1} - f_{t, l+2} + b_x^2 f_{t, l+1}). \quad (\text{II}, 4)$

Durch Einsetzen der Werte von $f_{t+\Delta t, l-1}$, $f_{t+\Delta t, l}$ und $f_{t+\Delta t, l+1}$ in (II, 2) erhält man:

$$\begin{aligned} f_{t+2\Delta t, l} &= f_{t, l} - 2a_x^2 [-f_{t, l-1} + 2f_{t, l} - f_{t, l+1} + b_x^2 f_{t, l}] \\ &\quad + a_x^4 [f_{t, l-2} - 4f_{t, l-1} + 6f_{t, l} - 4f_{t, l+1} + f_{t, l+2} + 2b_x^2 (-f_{t, l-1} + 2f_{t, l} - f_{t, l+1}) + b_x^4 f_{t, l}]. \end{aligned} \quad (\text{II}, 5)$$

Ersetzen von l durch $l-1$ und $l+1$ liefert $f_{t+2\Delta t, l-1}$ und $f_{t+2\Delta t, l+1}$. Mit diesen Werten folgt auf Grund der verallgemeinerten Gl. (II, 1)

$$f_{t+(r+1)\Delta t, l} = f_{t+r\Delta t, l} - a_x^2 (-f_{t+r\Delta t, l-1} + 2f_{t+r\Delta t, l} - f_{t+r\Delta t, l+1} + b_x^2 f_{t+r\Delta t, l}) \quad (\text{II}, 6)$$

der Wert von $f_{t+3\Delta t, l}$:

$$\begin{aligned} f_{t+3\Delta t, l} &= f_{t, l} - 3a_x^2 [-f_{t, l-1} + 2f_{t, l} - f_{t, l+1} + b_x^2 f_{t, l}] \\ &\quad + 3a_x^4 [f_{t, l-2} - 4f_{t, l-1} + 6f_{t, l} - 4f_{t, l+1} + f_{t, l+2} + 2b_x^2 (-f_{t, l-1} + 2f_{t, l} - f_{t, l+1}) + b_x^4 f_{t, l}] \\ &\quad - a_x^6 [-f_{t, l-3} + 6f_{t, l-2} - 15f_{t, l-1} + 20f_{t, l} - 15f_{t, l+1} + 6f_{t, l+2} - f_{t, l+3}] \\ &\quad + 3b_x^2 (f_{t, l-2} - 4f_{t, l-1} + 6f_{t, l} - 4f_{t, l+1} + f_{t, l+2}) + 3b_x^2 (-f_{t, l-1} + 2f_{t, l} - f_{t, l+1}) + b_x^6 f_{t, l}. \end{aligned} \quad (\text{II}, 7)$$

Man erkennt, daß die Zahlenfaktoren vor den eckigen und runden Klammern sowie vor den einzelnen Gliedern Binomialkoeffizienten sind, so daß man den Fehler zur Zeit $t+r\Delta t$ ohne weitere Rechnung anschreiben kann. Betrachten wir einen Punkt, für den gilt

$$|f_{t, l}| \geq |f_{t, l \pm i}| \quad i=1, 2, 3, \dots$$

Der für die Konvergenz ungünstigste Fall tritt ein, wenn

$$f_{t, l \pm i} = \begin{cases} f_{t, l} & \text{für } i=2k \\ -f_{t, l} & \text{für } i=2k+1, \end{cases}$$

denn dann addieren sich alle Glieder in den runden Klammern. Für $f_{t+\Delta t, l}$, $f_{t+2\Delta t, l}$ und $f_{t+3\Delta t, l}$ erhält man damit:

$$f_{t+\Delta t, l, \text{extr}} = f_{t, l}[1 - a_x^2(4 + b_x^2)], \quad (\text{II}, 8)$$

$$\begin{aligned} f_{t+2\Delta t, l, \text{extr}} &= f_{t, l}[1 - 2a_x^2(4 + b_x^2) + a_x^4(4 + b_x^2)^2] \\ &= f_{t, l}[1 - a_x^2(4 + b_x^2)]^2, \end{aligned} \quad (\text{II}, 9)$$

$$\begin{aligned} f_{t+3\Delta t, l, \text{extr}} &= f_{t, l}[1 - 3a_x^2(4 + b_x^2) + 3a_x^4(4 + b_x^2)^2 \\ &\quad - a_x^6(4 + b_x^2)^3] \\ &= f_{t, l}[1 - a_x^2(4 + b_x^2)]^3. \end{aligned} \quad (\text{II}, 10)$$

Allgemein gilt für $f_{t+r\Delta t, l, \text{extr}}$:

$$\begin{aligned} f_{t+r\Delta t, l, \text{extr}} &= f_{t, l}[1 - a_x^2(4 + b_x^2)]^r \\ &= f_{t, l}[1 - (c^2(\Delta t)^2/(\Delta x)^2) \\ &\quad \cdot (4 + m_0^2 c^2 \Delta x)^2/\hbar^2]^r. \end{aligned} \quad (\text{II}, 11)$$

Für die Konvergenz des Fehlers ohne Vorzeichenwechsel ist notwendig, daß die Bedingung erfüllt ist:

$$(c^2(\Delta t)^2/(\Delta x)^2) \cdot (4 + m_0^2 c^2 (\Delta x)^2/\hbar^2) \geq 1. \quad (\text{II}, 12)$$

Anhang III

Konvergenzbedingung für die linearisierten Dirac-Gleichungen; ein- und mehrdimensionaler Fall

Die linearisierten DIRAC-Gleichungen lauten im feldfreien Fall:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \Psi_4}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right) \mp \frac{i m_0 c^2}{\hbar} \Psi_1, \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} \right) \pm \frac{i m_0 c^2}{\hbar} \Psi_2, \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right) \mp \frac{i m_0 c^2}{\hbar} \Psi_3, \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) \mp \frac{i m_0 c^2}{\hbar} \Psi_4. \end{aligned} \quad (\text{III}, 1)$$

Zerlegt man sie durch den Ansatz $\Psi = \varphi + i\psi$ in Real- und Imaginärteil, dann erhält man die acht Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial x} + \frac{\partial \psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) \mp \frac{m_0 c^2}{\hbar} \psi_1, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \psi_4}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right) \pm \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi_1; \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} \right) \mp \frac{m_0 c^2}{\hbar} \psi_2, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_4}{\partial z} \right) \pm \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi_2; \end{aligned} \quad (\text{III}, 2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \mp \frac{m_0 c^2}{\hbar} \psi_3, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) \mp \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi_3; \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \mp \frac{m_0 c^2}{\hbar} \psi_4, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) \mp \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi_4.\end{aligned}$$

Führt man Differenzenquotienten ein:

$$\begin{aligned}\partial/\partial t &\rightarrow \Delta t/\Delta t, & \partial/\partial y &\rightarrow \Delta y/\Delta y, \quad (\text{III}, 3) \\ \partial/\partial x &\rightarrow \Delta x/\Delta x, & \partial/\partial z &\rightarrow \Delta z/\Delta z,\end{aligned}$$

dann gehen diese Differentialgleichungen in Differenzengleichungen über. Der Faktor Δt wird gleich auf die rechte Seite gebracht:

$$\Delta t \varphi_{1,t,l,m,n} = \pm c \Delta t \left(\frac{\Delta_x \varphi_{4,t,l,m,n}}{\Delta x} + \frac{\Delta_y \psi_{4,t,l,m,n}}{\Delta y} + \frac{\Delta_z \varphi_{3,t,l,m,n}}{\Delta z} \right) \mp \frac{m_0 c^2 \Delta t}{\hbar} \psi_{1,t,l,m,n}, \quad (\text{III}, 4a)$$

$$\Delta t \psi_{1,t,l,m,n} = \pm c \Delta t \left(\frac{\Delta_x \psi_{4,t,l,m,n}}{\Delta x} - \frac{\Delta_y \varphi_{4,t,l,m,n}}{\Delta y} + \frac{\Delta_z \psi_{3,t,l,m,n}}{\Delta z} \right) \pm \frac{m_0 c^2 \Delta t}{\hbar} \varphi_{1,t,l,m,n}, \quad (\text{III}, 4b)$$

$$\Delta t \varphi_{2,t,l,m,n} = \pm c \Delta t \left(\frac{\Delta_x \varphi_{3,t,l,m,n}}{\Delta x} - \frac{\Delta_y \psi_{3,t,l,m,n}}{\Delta y} - \frac{\Delta_z \varphi_{4,t,l,m,n}}{\Delta z} \right) \mp \frac{m_0 c^2 \Delta t}{\hbar} \psi_{2,t,l,m,n}, \quad (\text{III}, 4c)$$

$$\Delta t \psi_{2,t,l,m,n} = \pm c \Delta t \left(\frac{\Delta_x \psi_{3,t,l,m,n}}{\Delta x} + \frac{\Delta_y \varphi_{3,t,l,m,n}}{\Delta y} - \frac{\Delta_z \psi_{4,t,l,m,n}}{\Delta z} \right) \pm \frac{m_0 c^2 \Delta t}{\hbar} \varphi_{2,t,l,m,n}, \quad (\text{III}, 4d)$$

$$\Delta t \varphi_{3,t,l,m,n} = \pm c \Delta t \left(\frac{\Delta_x \varphi_{2,t,l,m,n}}{\Delta x} + \frac{\Delta_y \psi_{2,t,l,m,n}}{\Delta y} + \frac{\Delta_z \varphi_{1,t,l,m,n}}{\Delta z} \right) \pm \frac{m_0 c^2 \Delta t}{\hbar} \psi_{3,t,l,m,n}, \quad (\text{III}, 4e)$$

$$\Delta t \psi_{3,t,l,m,n} = \pm c \Delta t \left(\frac{\Delta_x \psi_{2,t,l,m,n}}{\Delta x} - \frac{\Delta_y \varphi_{2,t,l,m,n}}{\Delta y} + \frac{\Delta_z \psi_{1,t,l,m,n}}{\Delta z} \right) \mp \frac{m_0 c^2 \Delta t}{\hbar} \varphi_{3,t,l,m,n}, \quad (\text{III}, 4f)$$

$$\Delta t \varphi_{4,t,l,m,n} = \pm c \Delta t \left(\frac{\Delta_x \varphi_{1,t,l,m,n}}{\Delta x} - \frac{\Delta_y \psi_{1,t,l,m,n}}{\Delta y} - \frac{\Delta_z \varphi_{2,t,l,m,n}}{\Delta z} \right) \pm \frac{m_0 c^2 \Delta t}{\hbar} \psi_{4,t,l,m,n}, \quad (\text{III}, 4g)$$

$$\Delta t \psi_{4,t,l,m,n} = \pm c \Delta t \left(\frac{\Delta_x \psi_{1,t,l,m,n}}{\Delta x} + \frac{\Delta_y \varphi_{1,t,l,m,n}}{\Delta y} - \frac{\Delta_z \psi_{2,t,l,m,n}}{\Delta z} \right) \mp \frac{m_0 c^2 \Delta t}{\hbar} \varphi_{4,t,l,m,n}. \quad (\text{III}, 4h)$$

Die Bedeutung der Indizes l und m zeigt Abb. 7. Für den dreidimensionalen Fall mit den Indizes l , m und n ist das ebene Gitter der Abbildung durch ein Raumgitter ersetzt zu denken, dessen Netzebenen durch den Index n bezeichnet sind.

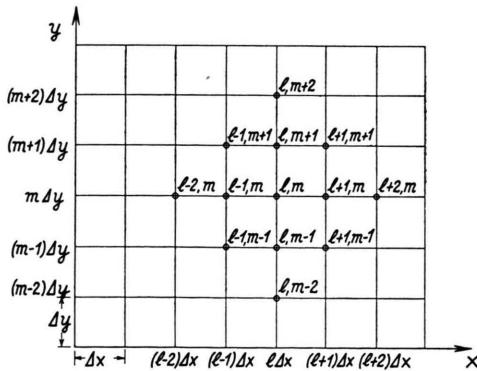


Abb. 7. Übergang zu Differenzengleichungen im zweidimensionalen Fall.

Sind die Werte $\varphi_{1,t,l,m,n} \dots \psi_{4,t,l,m,n}$ zu einer beliebigen Zeit gegeben, dann können aus diesen Gleichungen die zeitlichen Änderungen $\Delta t \varphi_{i,t,l,m,n}$ und

$\Delta t \psi_{i,t,l,m,n}$ aller φ und ψ während der Zeit Δt berechnet werden und man erhält:

$$\varphi_{i,t+\Delta t,l,m,n} = \varphi_{i,t,l,m,n} + \Delta t \varphi_{i,t,l,m,n},$$

$$\psi_{i,t+\Delta t,l,m,n} = \psi_{i,t,l,m,n} + \Delta t \psi_{i,t,l,m,n},$$

$$i = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{III}, 5)$$

Mit den Gl. (III, 4) und (III, 5) können alle Werte der φ und ψ zur beliebigen Zeit $t + r \Delta t$ berechnet werden, vorausgesetzt, daß das Verfahren konvergiert.

Es ist noch folgender Umstand zu beachten: Der Differentialquotient kann entweder durch den vorderen Differenzenquotienten

$$\partial \varphi / \partial x \rightarrow (\varphi_{l,m,n} - \varphi_{l-1,m,n}) / \Delta x$$

oder durch den hinteren Differenzenquotienten

$$\partial \varphi / \partial x \rightarrow (\varphi_{l+1,m,n} - \varphi_{l,m,n}) / \Delta x$$

ersetzt werden. Benutzt man bei der schritweise Be-rechnung der $\varphi_{i,t,l,m,n}$ und $\psi_{i,t,l,m,n}$ beispielsweise immer den hinteren Differenzenquotienten, dann entsteht in steigendem Maße eine Unsymmetrie, da $\varphi_{i,t,l,m,n}$ zwar durch alle φ mit einem Index $l+k$ jedoch durch keines mit einem Index $l-k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) beeinflußt würde. Dies läßt sich am einfachsten

vermeiden, indem man abwechselnd den vorderen und den hinteren Differenzenquotienten verwendet. Bei der iterierten DIRAC-Gleichung trat diese Schwierigkeit nicht auf, da der Differenzenquotient zweiter Ordnung — der beispielsweise in Gl. (4) gegeben ist — von vornherein symmetrisch ist.

Zur Untersuchung der Konvergenz des Verfahrens sei angenommen, daß φ_1^* vom exakten Wert $\varphi_{1,t}$ abweiche. Ausführlich geschrieben gilt:

Aus den Gln. (III, 4) und (III, 5) erhält man damit, wenn zuerst der vordere Differenzenquotient verwendet wird:

$$\begin{aligned}\varphi_1^*, t+\Delta t, l, m, n &= \varphi_{1,t}, t+\Delta t, l, m, n \pm m_0 c^2 \Delta t / \hbar \cdot f_{t,l,m,n}, \\ \varphi_3^*, t+\Delta t, l, m, n &= \varphi_3, t+\Delta t, l, m, n \pm c \Delta t / \Delta z \cdot (f_{t,l,m,n} - f_{t,l,m,n-1}), \\ \varphi_3^*, t+\Delta t, l, m, n+1 &= \varphi_3, t+\Delta t, l, m, n+1 \pm c \Delta t / \Delta z \cdot (f_{t,l,m,n+1} - f_{t,l,m,n}), \\ \varphi_4^*, t+\Delta t, l, m, n &= \varphi_4, t+\Delta t, l, m, n \pm c \Delta t / \Delta x \cdot (f_{t,l,m,n} - f_{t,l-1,m,n}), \\ \varphi_4^*, t+\Delta t, l, m, n+1 &= \varphi_4, t+\Delta t, l, m, n+1 \pm c \Delta t / \Delta x \cdot (f_{t,l+1,m,n} - f_{t,l,m,n}), \\ \varphi_4^*, t+\Delta t, l, m, n &= \varphi_4, t+\Delta t, l, m, n \pm c \Delta t / \Delta y \cdot (f_{t,l,m,n} - f_{t,l,m-1,n}), \\ \varphi_4^*, t+\Delta t, l, m+1, n &= \varphi_4, t+\Delta t, l, m+1, n \pm c \Delta t / \Delta y \cdot (f_{t,l,m+1,n} - f_{t,l,m,n}).\end{aligned}\quad (\text{III, 7})$$

Setzt man diese Werte in Gl. (III, 4a) ein, dann erhält man $\Delta t \varphi_1^*, t+\Delta t, l, m, n$ und damit auch

$$\begin{aligned}\varphi_1^*, t+2\Delta t, l, m, n &= \varphi_{1,t}, t, l, m, n + f_{t,l,m,n} + \Delta t \varphi_1^*, t, l, m, n + \Delta t \varphi_1^*, t+\Delta t, l, m, n \\ &= \varphi_{1,t}, t+2\Delta t, l, m, n + f_{t,l,m,n} + c^2(\Delta t)^2 \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (f_{t,l-1,m,n} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l+1,m,n}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\Delta y)^2} (f_{t,l,m-1,n} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m+1,n}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\Delta z)^2} (f_{t,l,m,n-1} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m,n+1}) \right] - \frac{m_0^2 c^4 (\Delta t)^2}{\hbar^2} f_{t,l,m,n}.\end{aligned}$$

Der Fehler zur Zeit $t+2\Delta t$ beträgt also:

$$\begin{aligned}f_{t+2\Delta t, l, m, n} &= f_{t,l,m,n} + c^2(\Delta t)^2 \left[\frac{f_{t,l-1,m,n} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l+1,m,n}}{(\Delta x)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_{t,l,m-1,n} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m+1,n}}{(\Delta y)^2} + \frac{f_{t,l,m,n-1} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m,n+1}}{(\Delta z)^2} - \frac{m_0^2 c^2 (\Delta t)^2}{\hbar^2} f_{t,l,m,n} \right].\end{aligned}\quad (\text{III, 8a})$$

Für den eindimensionalen Fall ist diese Gleichung äquivalent der aus den iterierten DIRAC-Gleichungen gewonnenen Gl. (II, 1). Daß der Index $t+2\Delta t$ lautet und nicht $t+\Delta t$, ist für die Konvergenz gleichgültig. Die Konvergenzbedingungen (65) und (67) gelten daher auch für die linearisierten, eindimensionalen DIRAC-Gleichungen. Im folgenden wird gezeigt, daß sie auch im mehrdimensionalen Fall gelten.

Gl. (III, 8a) läßt sich in den folgenden drei Formen schreiben:

$$\begin{aligned}f_{t+2\Delta t, l, m, n} &= f_{t,l,m,n} + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \left[f_{t,l-1,m,n} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l+1,m,n} - \frac{m_0^2 c^2 (\Delta x)^2}{\hbar^2} f_{t,l,m,n} \right] \\ &\quad + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta y)^2} [f_{t,l,m-1,n} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m+1,n}] + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta z)^2} [f_{t,l,m,n-1} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m,n+1}]\end{aligned}\quad (\text{III, 8b})$$

oder

$$\begin{aligned}f_{t+2\Delta t, l, m, n} &= f_{t,l,m,n} + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta y)^2} \left[f_{t,l,m-1,n} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m+1,n} - \frac{m_0^2 c^2 (\Delta y)^2}{\hbar^2} f_{t,l,m,n} \right] \\ &\quad + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} [f_{t,l-1,m,n} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l+1,m,n}] + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta z)^2} [f_{t,l,m,n-1} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m,n+1}]\end{aligned}\quad (\text{III, 8c})$$

oder

$$\begin{aligned}f_{t+2\Delta t, l, m, n} &= f_{t,l,m,n} + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta z)^2} \left[f_{t,l,m,n-1} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m,n+1} - \frac{m_0^2 c^2 (\Delta z)^2}{\hbar^2} f_{t,l,m,n} \right] \\ &\quad + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} [f_{t,l-1,m,n} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m+1,n}] + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta y)^2} [f_{t,l-1,m,n} - 2f_{t,l,m,n} + f_{t,l,m,n+1}].\end{aligned}\quad (\text{III, 8d})$$

Für die weitere Rechnung wollen wir Gl. (III, 8b) benutzen. Alle daraus für Δx ableitbaren Bedingungen müssen auf Grund der Gln. (III, 8c) und (III, 8d) auch für Δy und Δz gelten. Ebenso gelten die Bedingungen für Δy und Δz auch für Δx . Zur Verringerung der Schreibarbeit sei weiter das Glied $(c^2(\Delta t)^2/(\Delta z)^2) \cdot []$

weggelassen, da es mit dem Glied $(c^2(\Delta t)^2/(\Delta y)^2) \cdot []$ übereinstimmt und sich sein Beitrag zum Endergebnis leicht rückschließend feststellen lässt. Wir können daher auch noch den Index n fallen lassen. Mit der Bezeichnungsweise der Abb. 7 erhält man dann mit

$$\begin{aligned} a_x^2 &= c^2(\Delta t)^2/(\Delta x)^2, \quad a_y^2 = c^2(\Delta t)^2/(\Delta y)^2, \quad b_x^2 = m_0^2 c^2(\Delta x)^2/\hbar^2 && \text{für die Fehler} \\ f_{t+2\Delta t, l, m} &= f_{t, l, m} - a_x^2(-f_{t, l-1, m}) + 2f_{t, l, m} - f_{t, l+1, m} + b_x^2 f_{t, l, m} \\ &\quad - a_y^2(-f_{t, l, m-1}) + 2f_{t, l, m} - f_{t, l, m+1}, && (\text{III}, 9a) \\ f_{t+2\Delta t, l-1, m} &= f_{t, l-1, m} - a_x^2(-f_{t, l-2, m}) + 2f_{t, l-1, m} - f_{t, l, m} + b_x^2 f_{t, l-1, m} \\ &\quad - a_y^2(-f_{t, l-1, m-1}) + 2f_{t, l-1, m} - f_{t, l-1, m+1}, && (\text{III}, 9b) \\ f_{t+2\Delta t, l+1, m} &= f_{t, l+1, m} - a_x^2(-f_{t, l, m}) + 2f_{t, l+1, m} - f_{t, l+2, m} + b_x^2 f_{t, l+1, m} \\ &\quad - a_y^2(-f_{t, l+1, m-1}) + 2f_{t, l+1, m} - f_{t, l+1, m+1}, && (\text{III}, 9c) \\ f_{t+2\Delta t, l, m-1} &= f_{t, l, m-1} - a_x^2(-f_{t, l-1, m-1}) + 2f_{t, l, m-1} - f_{t, l+1, m-1} + b_x^2 f_{t, l, m-1} \\ &\quad - a_y^2(-f_{t, l, m-2}) + 2f_{t, l, m-1} - f_{t, l, m}, && (\text{III}, 9d) \\ f_{t+2\Delta t, l, m+1} &= f_{t, l, m+1} - a_x^2(-f_{t, l-1, m+1}) + 2f_{t, l, m+1} - f_{t, l+1, m+1} + b_x^2 f_{t, l, m+1} \\ &\quad - a_y^2(-f_{t, l, m}) + 2f_{t, l, m+1} - f_{t, l, m+2}. && (\text{III}, 9e) \end{aligned}$$

Den Fehler zur Zeit $t+2\Delta t$ erhält man, wenn man in Gl. (III, 9a) $t+2\Delta t$ an Stelle von t geschrieben denkt.

$$\begin{aligned} f_{t+4\Delta t, l, m} &= f_{t+2\Delta t, l, m} - a_x^2 \left(-f_{t+2\Delta t, l-1, m} + 2f_{t+2\Delta t, l, m} - f_{t+2\Delta t, l+1, m} - \frac{m_0^2 c^2(\Delta x)^2}{\hbar^2} f_{t+2\Delta t, l, m} \right) \\ &\quad - a_y^2(-f_{t+2\Delta t, l, m-1} + 2f_{t+2\Delta t, l, m} - f_{t+2\Delta t, l, m+1}). && (\text{III}, 10a) \end{aligned}$$

Setzt man die Werte der Gln. (III, 9a) bis (III, 9e) in (III, 10a) ein, dann erhält man nach Ordnen der Glieder:

$$\begin{aligned} f_{t+4\Delta t, l, m} &= f_{t, l, m} - 2a_x^2[-f_{t, l-1, m} + f_{t, l, m} - f_{t, l+1, m} + b_x^2 f_{t, l, m}] \\ &\quad - 2a_y^2[-f_{t, l, m-1} + 2f_{t, l, m} - f_{t, l, m+1}] \\ &\quad + a_x^4[f_{t, l-2, m} - 4f_{t, l-1, m} + 6f_{t, l, m} - 4f_{t, l+1, m} + f_{t, l+2, m}] \\ &\quad + 2b_x^2(-f_{t, l-1, m} + 2f_{t, l, m} - f_{t, l+1, m}) + b_x^4 f_{t, l, m} \\ &\quad + 2a_x^2 a_y^2[(f_{t, l-1, m-1} - 2f_{t, l, m-1} + f_{t, l+1, m-1}) - b_x^2 f_{t, l, m-1}] \\ &\quad + 2(-f_{t, l-1, m} + 2f_{t, l, m} - f_{t, l+1, m} + b_x^2 f_{t, l, m}) \\ &\quad + (f_{t, l-1, m+1} - 2f_{t, l, m+1} + f_{t, l+1, m+1} - b_x^2 f_{t, l, m+1})] \\ &\quad + a_y^4[f_{t, l, m-2} - 4f_{t, l, m-1} + 6f_{t, l, m} - 4f_{t, l, m+1} + f_{t, l, m+2}]. && (\text{III}, 10b) \end{aligned}$$

Betrachtet man einen Punkt, für den gilt:

$$|f_{t, l, m}| \geq |f_{t, l \pm i, m \pm j}|, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots,$$

dann ist der für die Konvergenz ungünstigste Fall gegeben durch:

$$f_{t, l \pm i, m \pm j} = \begin{cases} f_{t, l, m} & \text{für } i+j=2k, \\ -f_{t, l, m} & \text{für } i+j=2k+1. \end{cases}$$

Gl. (III, 10b) nimmt dann die Form an:

$$\begin{aligned} f_{t+4\Delta t, l, m, \text{extr}} &= f_{t, l, m}[1 - 2a_x^2(4+b_x^2) - 2(4a_y^2) + a_x^4(4+b_x^2)^2 \\ &\quad + (4a_y^2)^2 + 2(4a_y^2)a_x^2(4+b_x^2)] \\ &= f_{t, l, m}[1 - a_x^2(4+b_x^2) - 4a_y^2]^2. && (\text{III}, 10c) \end{aligned}$$

Ein Vergleich von (III, 9a), (III, 10b) und (III, 10c) mit (II, 1), (II, 5), (II, 9) und (II, 11) zeigt, daß für die Konvergenz des Fehlers ohne Vorzeichenwechsel die Bedingung

$$a_x^2(4+b_x^2) + 4a_y^2 \leq 1 \quad (\text{III}, 11)$$

erfüllt sein muß.

Hebt man aus Ungleichung (III, 11) den Faktor $4a_x^2(1+\frac{1}{4}b_x^2)$ heraus und setzt die ursprünglichen Werte von a_x^2 , a_y^2 sowie von b_x^2 ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{4c^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right) [1 + m_0^2 c^2(\Delta x)^2/4\hbar^2] \\ &\cdot \left(1 + \frac{1}{1+m_0^2 c^2(\Delta x)^2/4\hbar^2} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} \right) \leq 1. && (\text{III}, 12a) \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar $\Delta x / \Delta t \geq 2c$, (III, 12b) wobei das Gleichheitszeichen nur für verschwindend kleines Δx gilt.

Auf dem gleichen Wege, auf dem Ungleichung (55) in (65) umgeformt wurde, läßt sich (III, 12a) in die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta \bar{p}_{x,t} &\geq 4 \hbar (m/m_0) (1 + 4 \hbar^2/m_0 c^2 (\Delta x)^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\cdot \left(1 + \frac{1}{1 + m_0^2 c^2 (\Delta x)^2 / 4 \hbar^2} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III, 12c}) \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen

$$m = m_0$$

$$\text{und } \Delta x, \Delta y, \Delta z \gg |2 \hbar/m_0 c| \quad (\text{III, 12d})$$

folgt daraus die Unschärferelation (44) :

$$\Delta x \Delta \bar{p}_{x,t} \geq 4 \hbar.$$

Im dreidimensionalen Fall erhält Gl. (III, 10c) noch ein Glied $-4 a_z^2$, das ebenso wie das Glied $-4 a_y^2$ im nichtrelativistischen Grenzfall vernachlässigbar wird, so daß auch in diesem Fall die Unschärferelation (44) erhalten wird.

Geht man von den Gln. (III, 8c) oder (III, 8d) statt von (III, 8b) aus, dann erhält man unter den Voraussetzungen (III, 12d) die Konvergenzbedingungen

$$\Delta y \Delta \bar{p}_{y,t} \geq 4 \hbar \quad \text{und} \quad \Delta z \Delta \bar{p}_{z,t} \geq 4 \hbar.$$

Für $\Delta x \ll |2 \hbar/m_0 c|$ geht (III, 12c) über in:

$$\Delta \bar{p}_{x,t} \geq 2 m c [1 + (\Delta x)^2 / (\Delta y)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III, 13a})$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$(\Delta \bar{p}_{x,t})^2 = m^2 \frac{(\Delta x)^2}{(R \Delta t)^2} \quad \text{und} \quad (\Delta \bar{p}_{y,t})^2 = m^2 \frac{(\Delta y)^2}{(R \Delta t)^2}$$

kann man diese Ungleichung auch in der Form

$$\Delta \bar{p}_{x,t} \geq 2 m c [1 + (\Delta \bar{p}_{x,t})^2 / (\Delta \bar{p}_{y,t})^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III, 13b})$$

schreiben. Der Grenzwert (76)

$$\Delta \bar{p}_{x,t} \geq 2 m c$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \Psi_4}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} + i \frac{e}{\hbar c} A_z \Psi_3 \right) \pm \frac{i}{\hbar} (m_0 c^2 - E_{\text{pot}} + e V) \Psi_1, \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} - i \frac{e}{\hbar c} A_z \Psi_4 \right) \pm \frac{i}{\hbar} (m_0 c^2 - E_{\text{pot}} + e V) \Psi_2, \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + i \frac{e}{\hbar c} A_z \Psi_1 \right) \pm \frac{i}{\hbar} (-m_0 c^2 - E_{\text{pot}} + e V) \Psi_3, \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} &= \pm c \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} - i \frac{e}{\hbar c} A_z \Psi_2 \right) \pm \frac{i}{\hbar} (-m_0 c^2 - E_{\text{pot}} + e V) \Psi_4. \end{aligned} \quad (\text{IV, 1})$$

Auf dem gleichen Wege, auf dem im Anhang III die Ungleichung (III, 12c) abgeleitet wurde, erhält man aus diesen Gleichungen die für den dreidimensionalen Fall geltende Beziehung:

²² Da bei dieser Schreibweise der Gleichungen die z -Achse bevorzugt ist, muß \mathcal{A} in Richtung der z -Achse gelegt werden.

kann hier nur erreicht werden, wenn $\Delta \bar{p}_{y,t}$ unendlich groß wird; das bedeutet, daß die Komponente des Impulses in der y -Richtung und damit die Richtung des Impulses vollkommen unbestimmt wird. Diese Unbestimmtheit der Richtung des Impulses entspricht der im Anschluß an Ungleichung (78) besprochenen Unbestimmtheit des Drehsinns des Drehimpulses.

Im dreidimensionalen Fall erhält (III, 10c) noch ein Glied $-4 a_z^2$, das in (III, 12c) als zusätzlicher Summand

$$\left(\dots + \frac{1}{1 + m_0^2 c^2 (\Delta x)^2 / 4 \hbar^2} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

erscheint. (III, 13b) geht dann über in

$$\Delta \bar{p}_{x,t} \geq 2 m c \left(1 + \frac{(\Delta \bar{p}_{x,t})^2}{(\Delta \bar{p}_{y,t})^2} + \frac{(\Delta \bar{p}_{x,t})^2}{(\Delta \bar{p}_{z,t})^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{III, 13c})$$

Wenn die Richtung des Impulses ganz unbestimmt ist, geht daraus wieder die Beziehung (76) hervor.

Es ist bemerkenswert, daß die Forderung nach Unbestimmtheit der Richtung des Impulses nur für

$$\Delta x \ll |2 \hbar/m_0 c|$$

auftritt, während man für

$$\Delta x \gg |2 \hbar/m_0 c|$$

auch ohne diese Forderung die HEISENBERGSche Unschärferelation erhält.

Wegen der Äquivalenz der Gln. (III, 8b), (III, 8c) und (III, 8d) können $\Delta \bar{p}_{x,t}$, $\Delta \bar{p}_{y,t}$ und $\Delta \bar{p}_{z,t}$ in (III, 13c) vertauscht werden.

Anhang IV

Konvergenz der linearisierten Dirac-Gleichungen unter Berücksichtigung von Kraftfeldern

Die feldfreien DIRAX-Gleichungen (III, 1) nehmen bei Berücksichtigung der potentiellen Energie $E_{\text{pot}}(r)$ des elektrischen Potentials $V(r)$ und des magnetischen Vektorpotentials $\mathcal{A}(r)$ folgende Form an²²:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta \bar{p}_{x,t} &\geq 4 \hbar \frac{m}{m_0 \eta} \left(1 + \frac{4 \hbar^2}{m_0^2 \eta^2 c^2 (\Delta x)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\cdot \left[1 + \frac{(\Delta x / \Delta y)^2}{1 + (\Delta x)^2 m_0^2 \eta^2 c^2 / 4 \hbar^2} + \frac{(\Delta x / \Delta z)^2}{1 + (\Delta x)^2 m_0^2 \eta^2 c^2 / 4 \hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{IV, 2a})$$

$$\eta^2 = (1 - E_{\text{pot}}/m_0 c^2 + e V/m_0 c^2)^2 + e^2 A^2/m_0^2 c^4. \quad (\text{IV, 2b})$$

Ebenso gilt wieder die Beziehung (III, 12b).

Unter den Voraussetzungen (III, 12 d) erhält man daraus bis auf den Faktor $1/\eta$ die HEISENBERGSche Unschärferelation:

$$\Delta x \Delta \bar{p}_{x,t} \geq 4 \hbar / \eta. \quad (\text{IV}, 3)$$

Die Bedeutung von η ist leicht zu erkennen, wenn man ein gebundenes Teilchen betrachtet (z. B. $E_{\text{pot}} = -K/x$). $1/\eta$ wird in diesem Falle < 1 und die verlangte Unschärfe $\Delta x \Delta \bar{p}_{x,t}$ wird etwas verringert. Wegen des großen Nenners $m_0 c^2$ in Gl. (IV, 2 b) ist die Verkleinerung der Unschärfe jedoch im allgemeinen gering. Es erscheint einleuchtend, daß Ort und Impuls eines durch ein Kraftfeld gebundenen Teilchens

genauer bestimmt werden können als Ort und Impuls eines freien Teilchens.

Für den Fall $\Delta x \ll |2 \hbar / m_0 \eta c|$

erhält man aus Ungleichung (IV, 2 a) die Beziehung:

$$\Delta \bar{p}_{x,t} \geq 2 m c [1 + (\Delta x / \Delta y)^2 + (\Delta x / \Delta z)^2]. \quad (\text{IV}, 4)$$

Diese ist identisch mit der Ungleichung (III, 13 a), wenn man berücksichtigt, daß (III, 13 a) nur für den zweidimensionalen Fall angeschrieben wurde. Die Potentiale E_{pot} , V und \mathfrak{A} haben also keinen Einfluß auf die Ungleichungen (76), (77) und (78) sondern verkleinern nur den Wert von Δx , für den sie gelten.

Theorie des Anodenfalls

IV. Der Anodenfall des Homogenkohle-Hochstrombogens in Luft

Von W. BEZ* und K. H. HÖCKER

Aus dem Institut für Theoretische und Angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart
(Z. Naturforschg. 11 a, 118—123 [1956]; eingegangen am 5. Dezember 1955)

Der Anodenfall von Bögen mit Stromdichten $\approx 40 \text{ A/cm}^2$ (Achsenteratur 7000° K) baut sich nach den Gesetzen der Feldionisierung auf. Bei höheren Stromdichten ($\geq 100 \text{ A/cm}^2$) ist Feldionisierung unmöglich. An ihre Stelle tritt thermische Ionisierung. In der nachstehenden Arbeit wird das zugehörige Gleichungssystem entwickelt. — Bögen, bei denen in den Randzonen Feldionisierung maßgebend mitwirkt, zeigen starke Kontraktion. Der hier behandelte Bogen mit einer Achsenteratur von 11000° K ist ein Beispiel dafür. Die Kontraktion führt zu Stromdichten von mehr als 50000 A/cm^2 . Für die Anodenfallspannung ergeben sich 29 V.

Wie in einer früheren Arbeit¹ gezeigt wurde, bedient sich der Anodenfall zur Lösung seiner Hauptaufgabe, nämlich der Erzeugung der für die Quasineutralität der Bogensäule erforderlichen Ionen, zweier verschiedener Mechanismen: der Feldionisierung und der thermischen Ionisierung. Grenzen und Möglichkeiten der erstgenannten wurden in II² aufgezeigt. Den thermischen Mechanismus, wie er beim Homogenkohle-Hochstrombogen zu erwarten ist, wollen wir im folgenden näher betrachten. Bekanntlich brennt dieser Bogen anodenseitig nicht stabil; er zeigt das Phänomen des Zischens. Dieses ist eng verknüpft mit der Kontraktion der Entladung vor der Anode. Deren Zustandekommen haben wir in III³ qualitativ erklärt. Die Kontraktion bedeutet für die Behandlung des thermischen Mechanismus eine Komplikation. Im Hinblick auf eine spätere Deutung der vielfältig auftretenden Zischerscheinungen wollen wir dieser nicht aus dem Wege gehen.

§ 1. Die Bewegung von Ionen und Elektronen

Wir verwenden ein eindimensionales Koordinatensystem, dessen Nullpunkt an der Grenze Bogensäule – Anodenfallgebiet liegt und dessen positive Richtung auf die Anode weist. Wie in früheren Arbeiten^{4, 5} gezeigt wurde, lässt sich die Driftbewegung von Ionen und Elektronen im Plasma unter dem Einfluß eines inhomogenen elektrischen Feldes durch folgende Differentialgleichung darstellen:

$$d \left(\frac{M}{2} v^2 \right) = \mp e dU \pm \frac{3}{4} K^2 \frac{M}{2} v^2 f \frac{dx}{\lambda} \quad (1)$$

(oberes Vorzeichen: Ionen; unteres Vorzeichen: Elektronen), wobei

$$K_+^2 = 8/3a; \quad K_-^2 = 2/a \quad (2)$$

und a ein Unsicherheitsfaktor in der Beweglichkeit von der Größenordnung 1 ist.

³ W. BEZ u. K. H. HÖCKER, Z. Naturforschg. 10 a, 714 [1955] (Anodenfall III).

⁴ W. BEZ u. K. H. HÖCKER, Z. Naturforschg. 9 a, 64 [1954].

⁵ W. BEZ u. K. H. HÖCKER, Z. Naturforschg. 9 a, 72 [1954] (Anodenfall I).

* Dissertation D 93, Stuttgart 1955.

¹ K. H. HÖCKER, Appl. Sci. Res. B 5, 543 [1955].

² K. H. HÖCKER u. W. BEZ, Z. Naturforschg. 10 a, 706 [1955] (Anodenfall II).